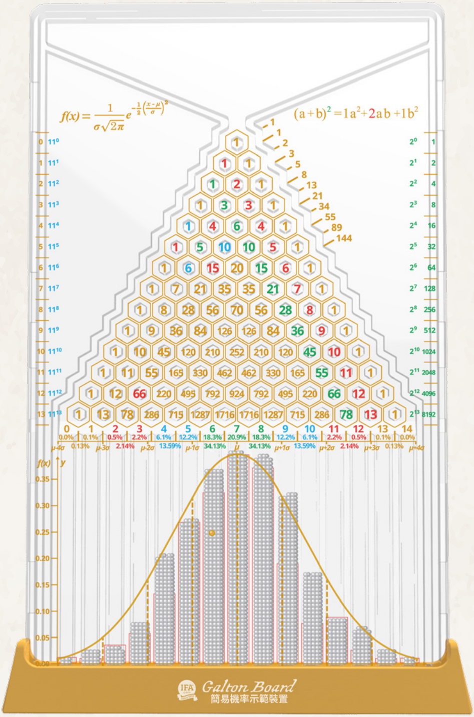
IFA® .com Since 1999

Galton Board
簡易機率示範裝置

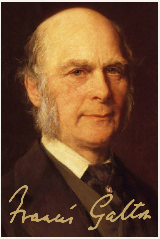


使用者指南

高爾頓板

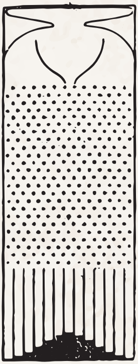
高 150 公釐、寬 95 公釐的高爾頓板 (簡易版) 是示範機率原理的教具，透過其中的帕斯卡三角形，直觀明瞭地展示了數學理論的運作方式與統計學的實務效益。板子的背面則有一張直方圖，透過理論性的投資組合，反映出市場報酬的隨機特質與或然率。

創新、靈活的高爾頓板，透過輕便的桌面裝置形態，傳授了幾百年來歷久彌新的各種數學概念。它融合了弗朗西斯·高爾頓爵士 (Sir Francis Galton, 1822-1911) 於 1873 年的發明，示範了二項式分布的實際情況，運用整齊排列的大量六邊形以及許許多多的圓形滾珠，模擬所謂的常態分布，從而體現了中央極限定理。板子表面的圓珠，在向下滾動的過程裡反覆撞擊木釘而彈開，看似混亂零散的運動，最後卻匯聚出井然有序的鐘形曲線，深深吸引了這位數學家。根據中央極限定理，更具體地說，根據棣美弗 (de Moivre, 1667-1754)—拉普拉斯 (Laplace, 1749-1827) 定理，只要合乎特定條件，就可以使用常態分布來模擬二項式分布的實際情況。



Sir Francis Galton

首先，把高爾頓板上下顛倒，引導所有的圓珠滾進板子最上方的收納盒裡。 然後再把板子轉正，底部平齊、與地面平行，上方的 4280 顆鋼珠以及一顆大金珠就會從收納盒裡傾瀉掉落，穿過高爾頓板表面 14 列對稱並排的六邊形。 只要裝置平放，沒有歪斜，圓珠就會從 105 個六邊形上彈開再向下滾，向左或向右彈開的機率相等。等到圓珠先後滾進板子最下方的 15 個底槽，最後堆積出來的線條，會變成鐘鼎形狀、內高外低的直方圖。 如此一來，只要把高爾頓板翻轉一次，就能在短短的 2 秒內，模擬



高爾頓的原版草圖

59920 枚硬幣的拋擲結果。在板子的左右兩端，第 14 號槽裡的圓珠，象徵了 14 次的拋擲結果都是硬幣正面朝上，而掉進 0 號槽的圓珠則代表了硬幣呈現 14 次反面的情況。

板子的頂部，印有常態分布以及二項式展開的公式。板子的下半部，印著常態分布或鐘形曲線，以及相對於分布狀況的平均值與標準差線。鐘形曲線，又稱為高斯分布 (紀念數學家 Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)，在統計學與機率理論當中，地位非常重要。它在自然科學、社會科學的領域裡，反映著各式各樣的隨機變量，不管是高爾頓板表面的滾珠，還是股票市場的每月報酬，都呈現了類似的特質。板子上面還有 Y 軸與 X 軸的相關說明，以及最底端每一條珠槽的編號，乃至於預期中的百分比與槽內圓珠數量。

與六邊形重疊的圖樣，則是所謂的帕斯卡三角形 (Blaise Pascal, 1623-1662)，在這個數字所構成的三角形當中，線條上方的兩個數字相加的結果，會等於下方的數字。每個六邊形所標註的數字，反映了圓珠從上方的六邊形滾向這個六邊形，有可能經過多少種不同的路徑。同時它還呈現了費波那契數列 (Leonardo Fibonacci, 1175-1250 年)，也就是帕斯卡三角形當中，特定對角線之和。帕斯卡三角形裡，潛藏著豐富多樣的數學原理與模式。諸如自然數、行總和、11 的 n 次方、2 的 n 次方、形數、大衛之星定理、曲棍球桿恆等式，都能在它當中找到。帕斯卡三角形還可以來解釋其他的模式跟原理，包括了質數、平方數、二進位數、卡塔蘭數、二項式展開、碎形、黃金比率，以及謝爾賓斯基三角形，但在板子上面予以省略。


Blaise Pascal

4280 顆鋼珠當中，包括了一顆體積略大的金色圓珠，象徵著某一次滾動的隨機結果。每個底槽上方的數據，反映了每顆圓珠最後滾進這裡的預估機率百分比。 只要在每次翻轉高爾頓板的時候，追蹤金色圓珠最後掉進什麼地方，就能明確觀察到各種不同結果的機率高低。 同時參考板

子背面的紅色投資組合直方圖，就可以利用金色圓珠的最終落點，針對下個月的股市，預估報酬的可能範圍與機率。高爾頓板表面的數字所預測的，金珠掉進某個槽內的機率，也可以協助我們針對股票市場進行類似的預測。

高爾頓板蘊藏了許多的統計學與數學概念，諸如概率論、獨立同分布 (iid) 隨機變量、常態或鐘形曲線、中央極限定理 (棣美弗—拉普拉斯定理)、二項式分布、伯努利 (Bernoulli, 1655-1705) 試驗、均值回歸、大數法則、硬幣正反面朝上與股市報酬的機率、隨機漫步理論、賭徒謬誤、班佛定律，以及高爾頓爵士當年所說的「非理性法則」。

高爾頓原著的摘要

高爾頓爵士曾在《自然遺傳》(1889 年) 這部鉅著當中,生動描述了自己所發明的裝置如何彰顯出看似混亂的隨機結果當中體現了什麼樣的秩序與規律。下列文字大致摘自那本 136 年前的名著,部分文字配合我們的高爾頓板設計而略予修改。

統計學的魅力

「很難理解統計學家為什麼偏好縮限研究範圍,只關注如何追求平均值,而不熱衷於更全面的觀點。他們的靈魂似乎無法感受多樣性的魅力,就像咱們英格蘭平原上某個郡縣的本地人,這種人似乎誤以為,只要把瑞士的山脈填進瑞士的湖泊裡,窪地就能抵銷掉高地,簡單明瞭,豈不美哉。平均值只是單獨存在的事實罷了,如果在這個基礎之上另外添上一筆不一樣的事實,與觀察所得平均值幾乎完全對應的一整套常態就有可能誕生。」

「有些人討厭統計學這個名字,但我個人覺得它充滿了美感與趣味。只要避免粗暴運用,而是用更高層次的方法巧妙處理,再予以謹慎解讀,這門學科處理複雜現象的能力,絕對非同尋常。這些原理是突破重重困難、開闢新徑的唯一工具,針對人類探索科學的路障與險阻,提供了突圍的契機。

頻率曲線成因的機械化圖示

「頻率曲線跟分布曲線,兩者可以相互轉換:因此,只要釐清其中一條線的起源,那麼另一條線的根源也就同樣容易理解了。接下來,我將透過這個裝置 (如圖所示),說明頻率曲線的起源,它以非常巧妙的方式,模擬了偏差是否發生的先決條件。」

我們所設計的新版高爾頓板,採用了防止靜電的塑膠框

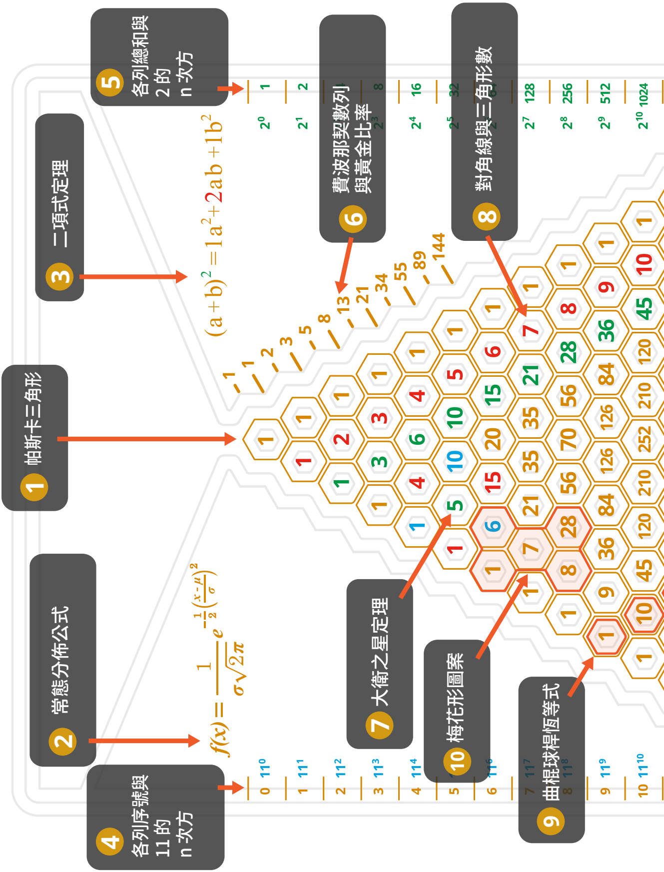
架結構。板子頂部的空間，設計成圓珠的收納盒。在漏斗狀的滾珠出口下方，則有 14 列的六邊形連成一片，類似於高爾頓的木釘陣，垂直插在板子的表面，構成滾動的路徑；而在整片六邊形的下方，則是從左到右排列著 15 道珠槽或直立隔間。板子的表面裝盛著 4280 顆鋼珠。在上下顛倒的狀態下，板子表面滾動的所有圓珠都會掉進頂端的收納盒當中；接下來，只要把板子轉正放置，模擬就會展開。收納盒邊界的形狀，會把匯聚在板子頂端的所有圓珠，引導至盒子下緣的漏斗狀出口處。

「圓珠穿過漏斗，以奇特而有趣的方式，順著 (構成六邊形的) 諸多木釘之間的空隙向下飛奔；只要途中撞上了其他木釘子，就會向右或向左橫跳一小步。木釘呈現梅花狀的交錯排列，因此，向下滾動的圓珠每次下墜一截，都會撞上更下方的木釘而向兩側橫移。從漏斗裡傾瀉而下的圓珠，堆積出逐漸變寬的鋼珠山，最終，每一顆滾珠在最後一次從木釘上面彈開之後，都會迅速掉進某一道珠槽當中。最後，堆積在珠槽當中的圓珠分布，中間多、兩邊少，輪廓近似於頻率曲線，並且無論重複多少次，實驗最後呈現的形狀基本都相同。

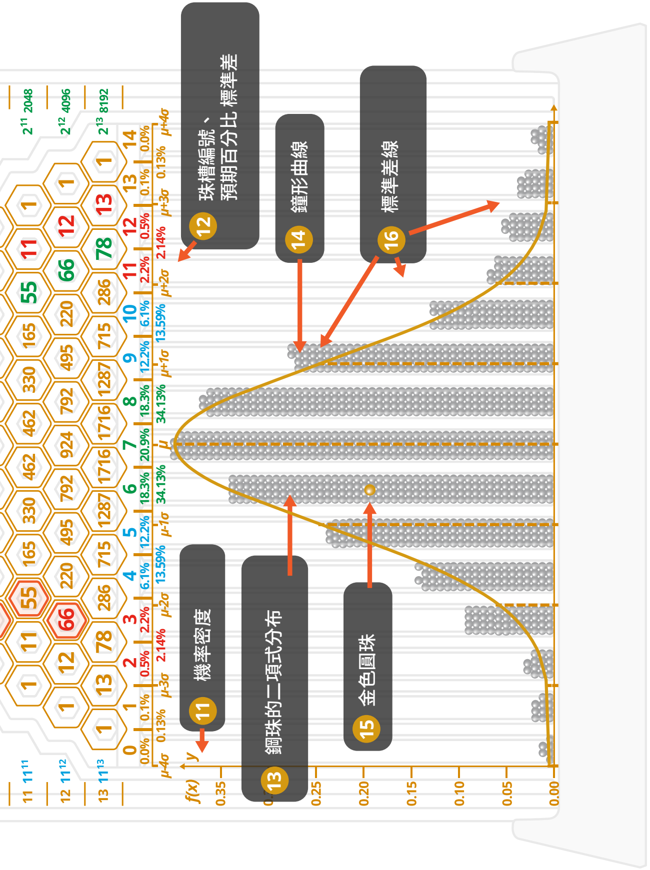
「裝置運作的原理是，每顆圓珠在自身滾動的過程裡，都會遭遇一連串小小的、獨立的意外事件。極少數情況下，一連串的巧合會接連發生，引導某一顆圓珠朝著更靠外側的珠槽跳動過去：不過，在絕大多數情況下，導致圓珠往右偏離的意外，發生的次數都會與導致圓珠向左偏離的意外，或多或少保持某種均衡。換句話說，大多數的圓珠，都會滾進漏斗狀出口正下方附近的幾個珠槽當中，而圓珠偏離中央、滾向左右兩邊的頻率則是快速降低，降低的頻率遠超過偏離距離的增加幅度。」

表象的混亂所潛藏的秩序

「在我的所知所學當中，幾乎沒有什麼東西比『誤差頻率法則』所傳達的宇宙秩序奧妙，更能讓人留下終生的深刻印象。假如古代的希臘人也知曉這條法則，他們甚至有可能創造出擬人的神話，將這條法則奉為某尊神祈。縱使在最混亂、最令人迷惑的環境裡，它也能以寧敬致遠、謙和自持的姿態，證明自己的正確。紊亂的規模越大，表象的失序狀態越嚴重，最後回歸常態的擺盪就會越精準。這正是所謂放諸四海皆準的非理性法則。只要把許許多多的飄忽元素集合起來，在數量夠大的情況下傾洩而下，就會在其間發現出乎意料、至簡唯美的規律性。塵埃落定之後，各個珠槽的頂端形成了一條流暢的曲線，比例保持不變；每樣東西在各自找到定點之際，彷彿都回歸到某種預先規劃、精確契合的位置上。只要確知了珠槽當中任兩個指定級別的測定數值，那麼，除了最外側兩端的特例之外，其他所有級別的數值都能透過前述的方式預測出來，預測精度也相當高。



1 帕斯卡三角形
2 常態分佈公式
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
3 二項式定理
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
4 各列序號與 11 的 n 次方
5 各列總和與 2 的 n 次方
6 費波那契數列與黃金比率
7 大衛之星定理
8 對角線與三角形數
9 曲棍球桿恆等式
10 梅花形圖案



11 機率密度
12 珠槽編號、預期百分比 標準差
13 鋼珠的二項式分布
14 鐘形曲線
15 金色圓珠
16 標準差線

高爾頓板的特點

1 帕斯卡三角形

帕斯卡三角形是由不同數字所組成的三角形，其規則如下：上面那兩個角的數字相加起來，其總和恰好等於倒三角底端的那個數字。這樣的模式，可以無限延續、綿延不絕。布萊斯・帕斯卡利用這種規則所創造出的三角形，持續鑽研機率理論，並且據此發表了算術三角論 (1665) 這篇經典數學論文。事實上，在他之前幾百年前，波斯、印度、中國、德國、義大利等文明裡，也有其他的數學家曾經研究過類似課題。這種三角形的模式，也可以轉換為二項式係數的數學特性。而在高爾頓板的表面，每個六邊形所標註的數字，代表了圓珠從最上方滾動到這個六邊形的可能途徑數量。

2 常態分布公式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

在機率理論當中，常態分布是實數隨機變項的連續性機率分布類型。這裡表示的，乃是機率密度函數 **f(x)** 的通常形態。常態分布在統計學當中的地位非常重要，在自然科學與社會科學領域都有著廣泛的用途，可以針對實數隨機變項的未知分布狀態予以說明。公式當中包括了常數 pi (**π ≈ 3.142**)，也就是所謂的圓周率 (正圓的周長相對於直徑的倍率)。此外還包括了尤拉數 (**e ≈ 2.718**)，即自然對數函數的底數。根據獨立同分布中央極限定理，隨機變量 **x** 隨著樣本數的規模增大，將逐漸呈現常態分布，同時 sigma (**σ**) 是有限的。

3 二項式定理

二項式定理描述了二項式冪的代數展開式。至於二項式展開式當中所出現的係數，則可以用帕斯卡三角形予以定義。也就是說，帕斯卡三角形的第 **n** 列，係由多項式展開式 $(a + b)^n$ 的係數構成。至於在高爾頓板上，二項式即指左與右 $(L + R)^n$。

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(L+R)^3 = 1L^3 + 3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

展開之後的 $(a + b)^n$ 即為 $(a + b)^n = x_0a^n + x_1a^{n-1}b + x_2a^{n-2}b^2 + \ldots + x_{n-1}ab^{n-1} + x_nb^n$ 其中，呈現下列形態的係數 x_k 正是出現在帕斯卡三角形第 **n** 列的第 **k** 項當中的數字 (其中 **k** 與 **n** 同樣從 0 起算)。這也能用下列格式呈現：$x_k = \binom{n}{k}$，也就是「**n** 選出 **k**。」高爾頓板上面的第一個六邊形是 $\binom{0}{0}$，接下來則是 $\binom{1}{0}$ 以及 $\binom{1}{1}$。

針對 $n = 2$ 的 $(a + b)^n$ 以及 $n = 3$ 的 $(L + R)^n$，板子表面也列出了二項式表達的範例。

4 各列序號與 11 的 n 次方

在板子的左側，帕斯卡三角形從上到下的十四列六角形各有編號，第一列指定為 n=0，而每一列的第一個 (最左側) 項次則指定為 k=0。十四列也是足夠多的數量，因此而得出的二項式分布，足以良好、可靠模擬連續常態分布的狀況。

假如將每一列的每個六角格裡面的數值，合併看作同一個數字，每一格都對應某一位數 (最右邊是個位數、其左邊是十位數；格內數值若是兩位數或更多，則向左邊的格子進位)，就成為 11 的乘冪 (11^n)：1、11、121、1331、14641... 從而跟帕斯卡三角形當中每一列的數字相符。

5 各列總和與 2 的 n 次方

任一列當中，每個六角格內數字的總和，剛好等於 2^n，其中 n 是那一列的序號。例如，在第三列裡，四個帕斯卡數字加起來的結果是 1 + 3 + 3 + 1 = 8，恰好就是 2^3。

每一列的格內數字的總和，標註在 2 的乘冪旁邊，而下方列的加總結果都比上方列倍增。此外，若將某一列裡所有數字的平方全部加起來，則會剛好等於該列序號乘以二的那一列裡最中間六角格內所註記的數字。舉例來說，在第四列裡，如果將每一格數字的平方全部相加 ($1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$)，就會得出 70，恰與第八列最中間那一格的數字相同。

6 費波那契數列與黃金比率

若是將帕斯卡三角形拆分成許多條對角線，每條對角線上每一個數字的總和，都與費波那契數列相符。序列裡的數字呈現：1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89，依此類推。數列當中的每個數字，都是前兩組數字的總和。例如：2+3=5、3+5=8、5+8=13、8+13=21... 這套數列首見於義大利數學家萊昂納多・費波那契的名著「算術之書」(Liber Abaci, 1202)。隨著費波那契數列持續向上延伸，數列當中彼此相鄰的任意兩組數字相除，得出的比值會趨近於所謂的黃金比率 (Φ)，即 1.61803398... 但絕不會剛好相等。例如：55/34=1.618、89/55=1.618、144/89=1.618。黃金比率最早由幾何學之父歐幾里得 (Euclid) 在西元前 300 年發表的「幾何原本」(Elements) 當中提出。千餘年後的文藝復興時代，達文西頻繁運用黃金比率，創作出多幅曠世鉅作。黃金比率的公式如下：

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 大衛之星定理

根據大衛之星定理，環繞著某個數字的六個數字，如果依據規律拆成兩組，其中一組的三個數字的乘積，會與另一組的乘積相等。例如三角形當中的數字 5，依序被 1、4、10、15、6、1 這六個數字的格子所包圍，若將其中的第一、三、五格與第二、四、六格拆成兩組並分別相乘，就會發現 $1 \times 10 \times 6 = 4 \times 15 \times 1 = 60$。

8 梅花形圖案

棋盤上的各個六邊形，排列成梅花形 (Quincunx) 的圖樣，也就是其中的四個格子構成了宛如正方形的四個角，而第五個格子則位於與其他四格距離相等的中心位置 (如同骰子上「5」那一面的點數分布狀態)。

9 對角線與三角形數

對角線上的數字，是單純形的形數，最左以及最右的兩條線裡面每一格都只有 1；旁邊的那一條對角線，則是自然數或計數數的序列，接下來則依序是三角形數 (恰好足以構成等邊三角形的點數)、四面體數(三角錐數)、五面體數排列出的對角線，最後是 5、6、7 的單體數列。每個自然數的平方，都等於第三條對角線 (三角形數列) 當中相鄰兩格內數字的和。例如：$7^2 = 49 = 21 + 28$

10 曲棍球桿恆等式

從標示 1 的最外側開始，任一條對角線上各個數字的總和，等於下方那一條對角線上的鄰近格子內的數字。把這幾個數字圈起來，就會構成一條宛如曲棍球桿的轉折，一如 $1 + 10 + 55 = 66$ 所示。

11 機率密度

機率密度 **f(x)** 反映了各筆觀測值與其實現機率之間的關係。它定義了某個隨機變量在特定的一連串隨機變量範圍當中出現的機率。最重要的機率密度函數，莫過於高斯隨機變量 (或常態隨機變量) 的機率密度函數，其圖形構成了宛如鐘形的曲線。這樣的 **f(x)** 數值，假設了 sigma 係數 (**σ**) 為 1 的常態分布。

12 珠槽編號、預期百分比與標準差

底端的 15 條珠槽，從 0 到 14 分別賦予編號，藉此判讀、記錄金色圓珠滾進了哪個槽內。此外，帕斯卡三角形當中，某種隨機結果在某一道珠槽內成立的機率，則可以想像在三角形的底端延伸出第十五列 (n=14) 協助判定。

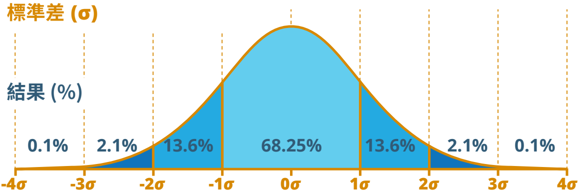
每個珠槽的預期結果百分比，顯示在珠槽編號下方，位居最中央的珠槽 (#7) 落袋為安機率最高，預期百分率為 20.9%。

而在珠槽資訊軸的下方，又補充標註了標準差的刻度。曲線當中每條標準差線的頂端，都標註著它與平均值之間的標準差數量，最多達到 4 個標準差 (**μ** ± 4σ)。此處標註的箭頭，象徵著 ±4 個標準差已經超出了最外側的那兩道珠槽。鐘形曲線最中央的那條線，反映了平均水準 (均值、**μ**，發音「mu」)。每條標準差線之間的數值，標示的是常態分布曲線的不同區間當中，結果落在該區的預期百分比。

13 鐘形曲線

常態分布所呈現的輪廓，通常稱為「鐘形曲線」，是所有機率分布當中，最廣為人知、用途最廣泛的分布形態。由於常態分布有能力模擬各式各樣的自然現象，如今它已經成為眾多機率問題的參考標準。生活中的各種資料組，實際的分布狀態都與常態分布相當契合，例如成年人

口的身高分布、嬰兒的體重分布、課堂測驗成績高低的分布、股市指數的單月報酬表現分布，以及高爾頓板上圓珠滾落的結果。 下圖顯示的鐘形曲線，依據標準差分隔成不同的區間。



由於這塊高爾頓板上的六邊形較小、圓珠通道較複雜，其所呈現的鐘形曲線稍微寬了一點。我們在板子上面另行印製了「最佳擬合」曲線，與上圖所示的曲線稍有不同。

14 鋼珠的二項式分布

每顆鋼珠都代表著一個**獨立同分布 (iid)** 的隨機變量，行經一連串六邊形圖案構成的多重路徑，滾落至終點。如果將鋼珠每次通過其中某個六邊形格子都視為一次伯努利試驗，則上千顆鋼珠從最高處滾至底端的過程中，所歷經的 14 次伯努利試驗，就會構成二項式分布。離散的二項式分布，與連續常態分布非常接近。

15 金色圓珠

在 4280 顆鋼珠當中，有一顆體積較大的金色圓珠，其直徑並非 0.8 公釐，而是 2.0 公釐。這顆特殊的圓珠，代表著一筆清晰可見的隨機結果。

16 標準差線

標準差 (**σ**) 是用以評估所有資料點圍繞著均值 (**μ**) 聚集程度的指標。常態分布的形狀，由平均值與標準差共同決定。典型的常態分布當中，約有 68% 的資料會剛好落在平均值的一個標準差的範圍之內。大約 95% 的資料會落在兩個標準差的範圍之內，大約 99.7% 的資料會落在三個標準差的範圍內，大約 99.99% 的資料會落在四個標準差的範圍內。帕斯卡三角形是由從上到下的 14 列六邊形所構成，因此三角形的底邊計有 14 個六邊形。珠槽總共有 15 個，板子左右兩端的最邊緣，以及中間每個六邊形之間，都排列著滿滿的珠槽。這 15 個珠槽，代表了總共 2x15/14 = 8.0 個分布標準差 (**μ ± 4σ**)。每一條珠槽相當於 0.533 個標準差，而每個標準差相當於 1.875 個珠槽 (8/15 = 0.533 或 15/8 = 1.875)。

標準差
(樣本的)

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

標準差
(母體的)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

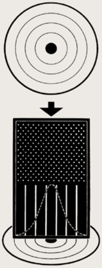
伊姆斯工作室重新詮釋的高爾頓板

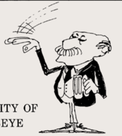
伊姆斯工作室的高爾頓板資訊圖

我們的高爾頓板是桌面尺寸的款式，靈感源自於工作室創辦人 Charles 與 Ray Eames 夫婦當年大膽打造的 11 英尺高「高爾頓機率板」，其首度亮相乃是在 1961 年「數學大觀園：繽紛數字世界」(Mathematica: A World of Numbers... and Beyond) 的展覽現場。而後為了迎接 1964 年的紐約世界博覽會上，贊助商 IBM 在品牌展館裡策劃了高達 14½ 英尺的伊姆斯氏機率板。右圖所示者為 1961 年數學大觀園展覽現場資訊標誌的迷你版本。

GALTON'S

PROBABILITY BOARD





THIS MACHINE DEMONSTRATES HOW A PROBABILITY CURVE CAN BE FOUND BY EXPERIMENT

HORACE HAS A DEFINITE PROBABILITY OF HITTING THE BULLSEYE

HE CAN GET AN IDEA OF THIS PROBABILITY BY COUNTING THE NUMBER OF DARTS THAT HIT THE BULLSEYE, AND COMPARING IT WITH THE TOTAL NUMBER HE THROWS.

THE MORE DARTS HE THROWS, THE BETTER HIS CHANCES OF GETTING A GOOD ESTIMATE.

IN EFFECT, THE GALTON BOARD THROWS A BALL AT THE CENTER BOX.

THE PINS INTRODUCE ERRORS (AS HORACE DOES) THAT MAKE MOST OF THE BALLS MISS THE BULLSEYE.

WE CAN ESTIMATE THE PROBABILITY OF HITTING A GIVEN BOX BY COUNTING THE NUMBER OF BALLS THAT LAND IN THE BOX.

NOTICE HOW CLOSELY THE CURVE FORMED BY THE BALLS MATCHES THE CURVE PAINTED ON THE GLASS

A ball can land in any box, and yet any given box fills to nearly the same height each time the experiment is repeated.

THIS STABILITY IS DUE TO THE FACT THAT THERE ARE MANY BALLS.

Unpredictable | **More Predictable**

IF A RANDOM EVENT HAPPENS A GREAT MANY TIMES THE AVERAGE RESULTS ARE LIKELY TO BE PREDICTABLE.*

*The first mathematical theorem of this kind was proved by Jacob Bernoulli.

"With the probability approaching certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event in a series of independent trials with constant probability will differ from that probability by less than any given positive number, provided the number of trials is sufficiently large."

Jacob Bernoulli (1654-1705)

"RELATIVE FREQUENCY" is the number of times an event* occurs divided by the number of trials.**

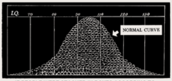
In the Probability Board the release of a ball is a ** TRIAL.

Landing (or not landing) in a given box is an * EVENT.

The curve painted on the glass was calculated by a formula.

THIS CURVE IS A PARTICULAR THEORETICAL CURVE CALLED THE "NORMAL CURVE", WHICH DESCRIBES THE BEHAVIOR OF SUCH THINGS AS–

I.Q. TESTS



IF PEOPLE WERE STACKED IN BOXES ACCORDING TO THEIR I.Q. SCORES, THEY WOULD FORM THE "NORMAL CURVE."

THE MEASUREMENTS OF BEAUTY CONTEST WINNERS

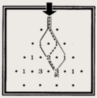
RUN AT ROULETTE

ERRORS IN MEASUREMENT

WHEN THE BALLS ARE DROPPED, THEY ARE ALL AIMED AT THE CENTER BOX. THE SUM OF ALL THE ERRORS CAUSED BY HITTING THE PINS DETERMINES THE BALLS' FINAL POSITION.

The average of many independent errors almost always leads to the Normal Curve, no matter what the underlying process may be.

THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IS A PRECISE STATEMENT OF CONDITIONS WHICH LEAD TO THE NORMAL CURVE.



LaPLACE (1749-1827)

DeMOIVRE (1667-1754)

PASCAL'S TRIANGLE

The number of possible paths to a given space in the array of pins is given by Pascal's Triangle. For the number of paths to a space is the sum of the number of paths to the two spaces above it. The probability of a ball's dropping in any box can be found by counting the number of paths to that box, and comparing it with the total number of paths.

As the number of trials gets large, the distribution of the balls is likely to be near normal. This idea, first stated in Abraham de Moivre's "Doctrine of Chances," was later proved by the Marquis de Laplace, and called the Laplace-de Moivre limit theorem. Hard work during the next hundred years eventually produced a much more general statement of the same sort, the "central limit theorem," universally conceded to be one of the most important results of probability theory.

PROBABILITY IS ADDITIVE

IF THE PROBABILITY OF "5" IS $\frac{1}{6}$ AND THE PROBABILITY OF "4" IS $\frac{1}{6}$

THEN THE PROBABILITY OF "5" OR "4" IS 1/6 + 1/6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

PROBABILITY, LIKE AREA, IS ADDITIVE. HENCE, IT IS OFTEN POSSIBLE TO REPRESENT PROBABILITY AS THE AREA UNDER A CURVE.

For example, in the Galton Board, the probability of getting in –

this box | or in either of these 2 boxes | or in any of these 3 boxes

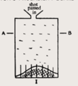
is represented by the corresponding area.

The branch of mathematics concerned with determination of lengths and areas is called "MEASURE THEORY." Probability is a branch of the Theory of Measure.

THE QUINQUNX

The pins in the Galton Board are often arranged in a figure found in nature – the four corners of a square with a pin in the center, called a Quincunx.

GALTON'S PROBABILITY BOARD -1877



GALTONIA (Hyacinthus candicanus)

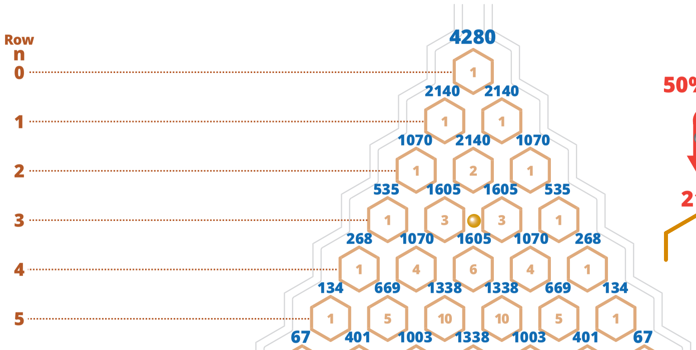
SIR FRANCIS GALTON (1822-1911)

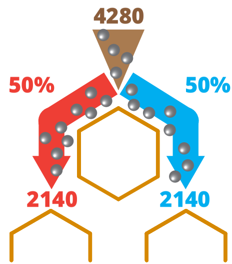
Galton was a cousin of Charles Darwin. In addition to mathematics, he studied and wrote about Botany, Heredity, Geography, Psychology, Statistical Methods, and Mountain Climbing.

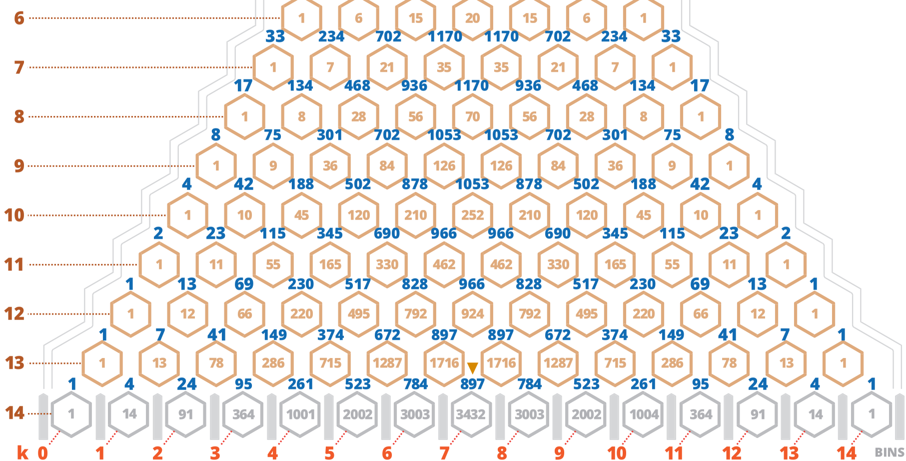
IBM

圓珠的對稱二項式分布

在完全水平放置的高爾頓板當中，圓珠每次掉進下排的六邊形之前，向左滾動或向右滾動的機率是相等的，從而構成了伯努利試驗的實例。這張圖反映了每一格六邊形預期會有多少顆圓珠滾動經過。收納盒當中的圓珠，大約有 4280 顆。滾動通過第一列六邊形 (即 0 號列) 之後，預期將有 2140 顆圓珠向左移動、2140 顆圓珠向右移動。若是持續追蹤圓珠每次撞上六邊形之後的轉向跟減少狀況，在圓珠通過第十四列 (即 13 號列) 之後，每個珠槽裡最後將有多少顆圓珠掉進去，也就可以確知了。帕斯卡三角形當中，每個六邊形分別標註的數字，均可視為圓珠抵達第 **n** 列第 **k** 格的可能途徑有多少種。以 4 號列為例，橫列當中各個六邊形所標註的數字分別是 **1、4、6、4、1**。將這些數字加起來，我們就能得出，針對 4 號列當中的 5 個六邊形，可能抵達的路徑總共有 16 條。這也是 2 以列號乘冪數次 (四次方) 之後的結果 ($2^4 = 16$)。



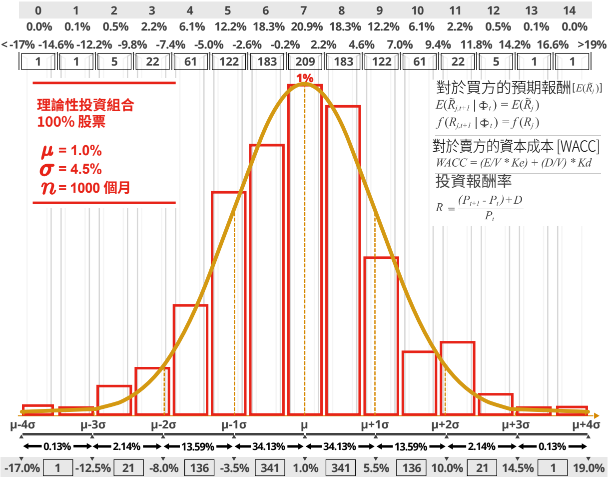




帕斯卡三角形的第 14 列 (以灰色呈現) 可供判定圓珠掉進高爾頓板底部 15 個珠槽當中某個特定槽內的機率 (對稱二項式分布)。根據前面 n=4 的計算，圓珠滾進第 14 列正中央珠槽 (k = 7) 的預期百分比為 3432/16384 = 20.95%。 換句話說 4280 顆圓珠當中，預估會有 897 顆圓珠，掉進最中間珠槽裡。在圓珠的總數增加至 16384 顆的情況下，第 14 列每個六邊形裡的數字，反映了預期中各個珠槽分別堆積的圓珠數量。

投資組合圖示

為了呈現市場報酬，我們選出某個理論性的投資組合。板子背面所印製的紅色長條圖，呈現的就是某個理論性投資組合 1000 個月報酬率分布的直方圖。紅色長條圖代表了 100% 股票的投資組合 (積極型)，我們假設其單月平均報酬率為 1.0%、標準差為 4.5%，樣本規模則為 1000 個月。在變動幅度多達四個標準差的情況下，報酬率的波動範圍約為 -17% 到 19% [1- (4x4.5) = -17、1 (4x4.5) = 19]。 亦即，在 15 個珠槽內，個別珠槽的報酬率範圍為 2.4%，平均值為 1.0%，恰好位於正中心。



標註預期百分比與報酬的珠槽分隔線

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.0%	0.1%	0.5%	2.2%	6.1%	12.2%	18.3%	20.9%	18.3%	12.2%	6.1%	2.2%	0.5%	0.1%	0.0%
1	1	5	22	61	122	183	209	183	122	61	22	5	1	1

<-17%	-14.6%	-12.2%	-9.8%	-7.4%	-5.0%	-2.6%	-0.2%	2.2%	4.6%	7.0%	9.4%	11.8%	14.2%	16.6%	>19%

在市場報酬率直方圖的上方，標註了四個可供參考的刻度。第一排數字，將 15 道珠槽從 0 一路編號至 14。第二組刻度則是隨機變量的百分比 (在這裡係指單月報酬率) 預期滾進各個珠槽的機率。第三組刻度則是每個珠槽的單月報酬率預期百分比的估計值。珠槽的隔板經過精心設計，確保了珠槽的邊界恰好對應報酬率的四個標準差 (涵蓋≈99.99% 的結果，或 $\mu \pm 4\sigma$)。最底部的刻度，則是根據 1000 個月的樣本規模，所計算的每個珠槽的預期月份數。

底部軸線

μ-4σ		μ-3σ		μ-2σ		μ-1σ		μ		μ+1σ		μ+2σ		μ+3σ		μ+4σ
	0.13%		2.14%		13.59%		34.13%		34.13%		13.59%		2.14%		0.13%	
-17.0%	1	-12.5%	21	-8.0%	136	-3.5%	341	1.0%	341	5.5%	136	10.0%	21	14.5%	1	19.0%

底部的座標軸上，標示了三種刻度。第一種註記了標準差線。第二項註明了每條標準差線之間預期結果的百分比。第三列根據 1000 個月的樣本，推算出每個標準差線之間的預期中單月報酬。

隨機漫步模型

根據效率市場假說，一檔證券 (j) 的現行價格 ($p_{j,t}$) 終將充分反映了市場上流通的各種資訊 (Φ_t)，而這意味著「… 連續性的價格變動，或在更常見的情況下，連續性的單一期間報酬表現，各期之間是相互獨立的。此外，它還假設了，連續性的變動或報酬，最後的分布狀況完全相同。這樣的兩個假設，共同構成了所謂的隨機漫步模型。若以公式表達，模型的主張是這樣的：

$$f(R_{j,t+1} \mid \Phi_t) = f(R_j),$$

常見的陳述方式則是，獨立隨機變量的條件機率分布以及邊際機率分布是相同的。此外，密度函數 (f) 必須自始至終維持一致 (t)。」假設某檔證券的預期報酬維持常態、歷久不變，則可得出

$$E(\tilde{R}_{j,t+1} \mid \Phi_t) = E(\tilde{R}_j)。$$

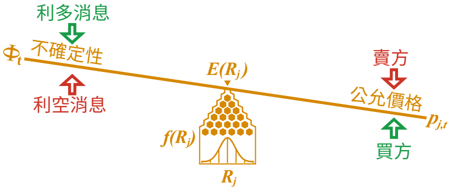
資料來源：Eugene F. Fama & Merton H. Miller，《金融財務理論》(The Theory of Finance)，1972 年，頁碼339

赫布納模型

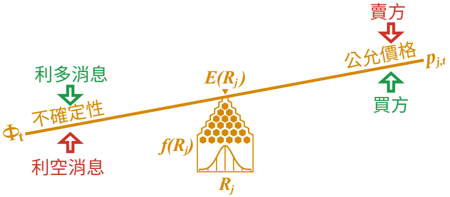
下面的蹺蹺板，說明了尤金法瑪的效率市場假說，即證券的價格 (j) 會充分反映市場上流通的所有資訊，最終引導價格達致公允合理的水位。蹺蹺板的左側，代表著在當時 (t) 已經完全反映在場內價格之上的任一資訊組合 (Φ_t)，而右側則代表著成千上萬的買方與賣方根據當時的具體資訊組合所認定或判斷得出的公允合理價位 ($p_{j,t}$)。根據效率市場假說的主張，在結構良好、合理透明、競爭健全的市場當中，市場價格 (p_t) 通常會等於或相當接近公允水位，因為各種關於相對稀缺程度、實用效益、潛在報酬的新資訊 (Φ_t)，都會促使投資人迅速因應，據此買進或賣出證券。

這個模型的三大組成要素，乃是由馬克・赫布納 (Mark Hebner) 在 2008 年全球金融危機期間所提出的。首先，從帕斯卡三角形頂端的蹺蹺板開始，進行推演。然後，圓珠在諸多六邊形構成的陣列裡彈跳滾動，模擬著每月股市報酬的隨機狀態 ($R_{j,t\ 1}$)。再來，圓珠會滾動至象徵實際報酬的珠槽當中 (R_j)，並且在樣本夠多的情況下，堆積出某種類似於鐘形曲線的輪廓 ($f(R_j)$)。

各種利多與向好的預測，以及各種利空與悲觀預估，都會隨機、持續浮現，並且在任何時機，反映出一筆投資的預期報酬 ($E(\tilde{R}_j)$) 在風險水準恆定的持有狀態下勢必具備不確定性。如果消息面利空導致了不確定程度提高，價格即須依比例下降，方能確保預期報酬大致持平。



如果利多消息導致了不確定程度降低，價格即須依比例上漲，方能確保預期報酬基本不變。



模型的名稱叫做赫布納模型，其貢獻則是將高爾頓板與帕斯卡三角形的智慧，整合在現代市場運作的架構當中。

資本成本

在經濟學與會計學當中，資本成本是指公司資金 (包括負債以及權益) 所涉及的成本，或者，從投資人的角度來看，指的是公司現有證券的應有報酬率。此外它也是企業新專案評估的必備指標之一。這個數字反映了投資人在向公司提供資金之後，期望於未來享有的最低報酬，進而針對新的專案設定了必須達成的目標下限。

$$WACC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)$$

E 代表的是公司股權的市值。
V 代表了權益以及負債的總市值，或稱 **E+D**。
Ke 是權益的成本。
D 是該公司負債的市值。
Kd 則是負債成本。
WACC 是資本成本的加權均值。
需要提醒的是，買方的預期報酬，會與賣方的資本成本相等（$E(\tilde{R}_{j,t}) = WACC$）。

投資報酬率公式

實際損益 (**R**) 的計算公式，是將一筆投資的價格變動 (P_{t+1} - P_t) 加上在這段期間支付予投資人的任何股利或現金（**D**），除以該筆投資的原始價格 (P_t) 而得出。

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

法瑪／弗倫奇因子模型
法瑪／弗倫奇五因子股票模型

法瑪／弗倫奇五因子模型，是用於資產訂價的模型，旨在掌握市場、規模、價值、獲利能力與投資模式對於股票報酬均值分別造成了哪些影響。這個理論是由諾貝爾獎經濟學家尤金·法瑪 (Eugene Fama) 與他的論文共同執筆人兼同事肯尼斯·弗倫奇 (Kenneth French) 於 2014 年開發，針對股市五大因子多元化投資組合，這個模型解釋了預期報酬橫斷面變異數的 71% 到 94%。以 1964 年的 CAPM (資本資產訂價模型) 以及 1993 年的法瑪／弗倫奇三因子模型為基礎，擴展精進而

來。法瑪／弗倫奇五因子模型方程式，源自於這兩位學者建立的一系列研究指數的時間序列回歸，並且涵蓋了各種不同公司特徵的長期過往股價走勢。其中，個別因子 (自變項) 的係數，反映了該項因子在投資組合當中的曝險或傾向。針對下列五大因素的曝險，即針對市場 (b_i)、規模 (s_i)、價值 (h_i)、獲利能力 (r_i) 以及投資 (c_i) 的曝險，若是能掌握住預期報酬的一切可能變化，那麼下列方程式的超額報酬截距 (a_i) 在適用於所有證券與資產組合之時均為零 (i)。

$$R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{it}$$

R_{it} 乃是 t (依變項) 這段期間裡，投資組合 **i** 的報酬。

而 R_{Ft} 則代表無風險報酬。

R_{Mt}-R_{Ft} 則是市值加權股票市場以及現金之間的報酬價差。

SMB_t 係以多元分散的小型股投資組合報酬，減去大型股的多元分散投資組合報酬，所得到的數值 (即規模效應)。

HML_t 反映了多元分散的高 BtM 股票組合以及低 BtM 股票投資組合之間的報酬落差 (即價值效應)。

RMW_t 代表了多元分散的較高獲利率個股組合以及較低獲利率個股投資組合之間的報酬落差。

CMA_t 是多元分散的低度投資公司組合與高度投資公司 (也就是法瑪／弗倫奇所謂保守投資公司以及積極投資公司) 資產組合之間的報酬落差。

e_{it} 代表了誤差項，是均值為零的殘差。

資料來源：Fama, Eugene F. and French, Kenneth R.，《五因子資產訂價模型》(A Five-Factor Asset Pricing Model) (2014 年 9 月)。

我與高爾頓板的因緣

馬克‧T‧赫布納

我的名字叫做馬克‧T‧赫布納，是 Index Fund Advisors, Inc. (IFA.com) 的創辦人，也是現任執行長；我們的公司，從事財富管理與稅務規劃事業。 此外，我也設計過多款新式的高爾頓板裝置。

針對投資的風險與報酬，最常見的說明方法，莫過於從過往歷史當中，搜集大量的報酬率樣本 (例如長達 1000 個月的指數漲跌資料)，從中推算平均報酬，以及報酬的標準差。假如需要使用 Excel 繪製一張常態分布曲線，只需要確定平均值與標準差，就能完成；這幾項數值，決定了常態分布曲線的確切樣貌。事實證明，哈利‧馬可維茲贏得諾貝爾經濟學獎殊榮的散點圖，即平均報酬相對於標準差的關係圖，其實就是鐘形曲線的比對結果。正是因為如此，當我發現這個世界上早就有了現成的裝置，可供示範鐘形曲線的產生方式，興奮之情難以言喻。我體會到，這種裝置也用來示範金融市場的運作常態，以及各種不同投資成果的實現機率。此外我還發現，高爾頓板可以用來模擬單月的投資報酬，展現出恆定的預期報酬、30 天內報酬表現的隨機特質，以及歷經超長期投資之後，實際報酬所呈現的鐘形曲線。簡而言之，這樣的教具，可以協助投資人迅速理解幾個投資的關鍵理念。

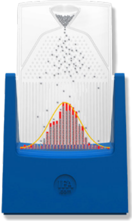
我與高爾頓板的因緣始於 2005 年，當時我恰好看到一部 1964 年世界博覽會的紀錄片，介紹了伊姆斯工作室 (Eames Office) 的參展作品。當時，查爾斯‧伊姆斯替 IBM 展館製作了一面 14.5 英尺高的超大型高爾頓板放在戶外，其原型則是他在更早之前策劃「數學大觀園：繽紛數字世界」(Mathematica：A World of Numbers... and Beyond)

的作品。數學大觀園是由伊姆斯工作室製作、IBM 資助的首個全沉浸式大型展覽,也是 1961 年洛杉磯加州科學與工業博物館新科學館落成開幕的重頭戲。

這張照片,則是我個人收藏的第一塊高爾頓板,由奧勒岡科學與工業博物館設計製造。我在 2009 年委託製作了照片裡這台高 8 英尺、寬 4 英尺的博物館藏等級機率示範裝置,藉此介紹一系列隨機事件可能導致的各種結果的範圍、機率與形態,推廣投資專業知識。如今,這台大型高爾頓板,陳列在 Index Fund Advisors 的總部大廳現場,在資本漫天飛舞、價位隨機浮動的華爾街,彰顯了看似紊亂的世到所潛藏的沉穩秩序。圓珠後面的紅色條形,呈現了理論性投資組合每月報酬的大量月度樣本,可供我們將圓珠的分布對照股市表現。在股票市場上,隨機事件包括了公司本身或資本主義環境的各種報導與訊息,以及反映了種種消息的證券價格。從中心點開始,圓珠的隨機流動模擬了一系列的公允價格,最終形成了單月報酬的常態分布圖樣,再次化為熟悉的鐘形曲線。

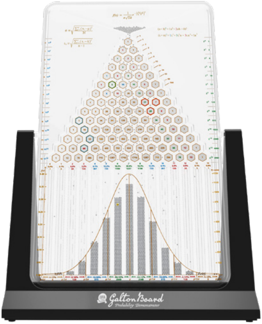
IFA 總部大廳裡 8 英尺高的巨型高爾頓板

後來,本人有幸獲得 Philip Poissant、Jerry Xu、Art Forster、Jackson Lin、Mike Auchterlonie、Brunson 家族與其他專業人士的幫助,在 2015 年製作出第一款 7.5 英寸的桌面尺寸高爾頓板,並且命名為「隨機漫步者」(The Random Walker®;美國專利碼


隨機漫步者®

D784,449)。這款便攜式的高爾頓板，不僅是理解統計學概念與股市隨機特質的理想教具，也是兼顧知識性與娛樂價值的桌面擺設與玩具。 憑藉創新的翻轉重置設計，只需輕輕一撥手指，就能輕鬆體驗混亂表象當中的井然有序。 全世界大約有 6 萬塊這樣的板子，擺放在各地的辦公桌上。

2024 年，我們再次推出了尺寸稍大的新版高爾頓板，確保相關的示範更充分傳達原理與知識予更多人。
最後，我們選擇了 12 英寸 x 8.5 英寸的規格，再次改版重製，這次命名為「高爾頓板：機率示範裝置 (美國專利碼 12,268,971 B1)。新的款式合併增設了兩種股市專用附加工具，以及 19 頁篇幅的詳細說明書與學習指南。

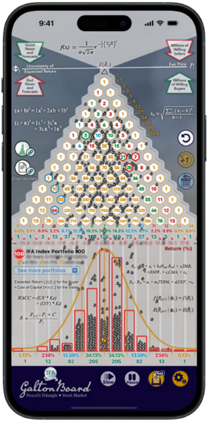


高爾頓板：機率示範裝置

這款桌面大小的新板，增添了有別於舊版的設計變革與升級， 更精確呈現了二項式分布與帕斯卡三角形的概念，以及其中蘊含的多樣數學原理。一旦把單月報酬資料的附加數據納入，就能洞悉各種股市要素 (包括赫布納模型) 的融入情況，以及它們與圓珠分布的鐘形曲線有多相似。

這款新設計的簡易高爾頓板，兼具經濟實惠、精巧便攜的優點，甚至可以隨身收納在口袋當中。

為了進一步推廣高爾頓板、普及帕斯卡三角形的相關知識，2023 年之時，本人再次委託專業團隊，開發了應用程式版本的數位高爾頓板。多虧了現代數位裝置當中的陀螺儀元件，您只需要輕輕轉動手機或 iPad，就能在 app 裡聽到、看見大量圓珠滾動的逼真聲響與畫面，宛如真實的鋼珠在您的數位裝置裡任您操縱。點擊設定圖示，還能自行疊加、對照二十個指數投資組合的直方圖，並且配合風險的增減，見證珠槽報酬刻度的變動。如欲下載適用於 iPhone 與 iPad 的應用程式，敬請啟動 Apple App Store，檢索「Index Fund Advisors」即可。 接下來，在應用程式裡尋找高爾頓板的圖案，存取互動式白板。 此外您也可以透過 Mac 筆電或桌機，造訪 Mac App Store，搜尋高爾頓板應用程式。最後，安卓裝置的使用者可以開啟 Google Play 商店，搜尋「Index Fund Advisors」即可。



高爾頓板：App 版本

安裝應用程式

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

Index Fund Advisors 簡介

Index Fund Advisors
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

揮別投機，學習投資

Index Fund Advisors, Inc. (IFA) 是收費式服務的投資顧問暨財富管理公司，秉持標準嚴謹的受託方忠誠義務，提供風險適度、全球多元分散、稅務對策式的專業投資策略。

IFA 是依法登記的投資顧問事業，服務對象涵蓋個人、退休金計畫、信託、公司、非營利組織以及各式公營民營機構，提供專業投資建議。創建於 1999 年的 IFA，甫於 2024 年慶祝了 25 週年，時至今日 IFA 持續以精準的投資建議，滿足全美各地客戶需求。

IFA 的價值與貢獻，並非僅限於投資建言。身為全方位服務的金融事業，IFA 同時提供投資建議、財富管理、財務規劃等服務，全程支援客戶管理完整的財務歷程。 我們的財富顧問，採行以客為尊的個人化方法，為客戶搭配最合宜的投資組合，同時備妥全方位的財富管理服務與財務規劃，營造周到全面的體驗。

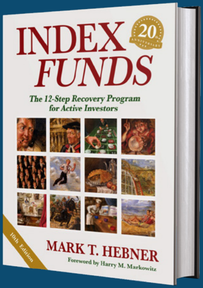
在個股、投資時機、經理人、投資風格等層面，IFA 精簡了大量曠日費時的活動，具體協助客戶撙節各種非必要成本。同時 IFA 採用嚴謹自律、務實計量的方法，實現多元分散投資的最佳化，確保至高成本效益。

IFA 融合了尤金・法瑪與肯尼斯・弗倫奇的研究成果與指數，廣泛借鏡了數十年的過往風險資料與報酬數據、第三代指數型基金規劃方法，以及

Dimensional Fund Advisors 所開發的升級版被動式交易技術。

IFA 順應客戶特有狀況與目標，量身規劃投資管理與投資組合策略，以及稅務規劃與會計、線上財務企劃與轉介服務，實現周延貼心、充分個人化的客戶體驗。產業歷練豐富的 IFA 財務顧問，提供了量身訂製的建議，專注支援客戶實現更長遠的財務目標。

馬克‧T‧赫布納是美商 Index Fund Advisors, Inc. (IFA) 的創始人兼執行長，憑藉備受推崇的著作《指數型基金：主動式投資人的 12 階段啟蒙課程》，專注耕耘投資教育。



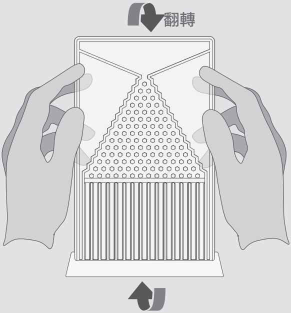
如需瞭解 IFA 如何協助您實現財務目標，敬請造訪 ifa.com 或直接來電洽詢。

www.ifa.com

Index Fund Advisors, Inc.
19200 Von Karman Ave.
Suite 150
Irvine, CA 92612
888-643-3133
ifa.com | info@ifa.com

高爾頓板的使用說明

1. 翻轉高爾頓板、上下顛倒，等待所有的圓珠通通掉進收納盒當中。
2. 將板子翻轉回來，正向、水平放置，等到所有的圓珠通通滾進底部的珠槽裡。
3. 首先較大的金色圓珠掉在哪裡，然後觀察所有圓珠的分布狀況。



原版高爾頓板的說明書內容，由 Tisley & Spiller 於 1873 年接受高爾頓爵士本人委託而製作。 板面上的說明文字，係以高爾頓爵士當年的筆跡呈現：

原理說明專用儀器
示範誤差或離散規律
作者：弗朗西斯‧高爾頓，倫敦皇家學會會員

首先把儀器倒轉過來，就能引導所有珠粒滾進珠囊內，完成填充。然後再把裝置迅速轉回來，即刻放置在完全水平的桌面上。 所有的珠粒都將掉進漏斗裡，再從漏斗下方出口往下流，沿著曲折的路徑穿過中間的耙欄，最終聚集在最底部的垂直隔間中，逐漸堆積出擴散的規律。

■ 邀您連往 ifa.com/galtonboard 瀏覽詳細資訊、影片、文章、照片、社群媒體內容與更多精彩內容等。