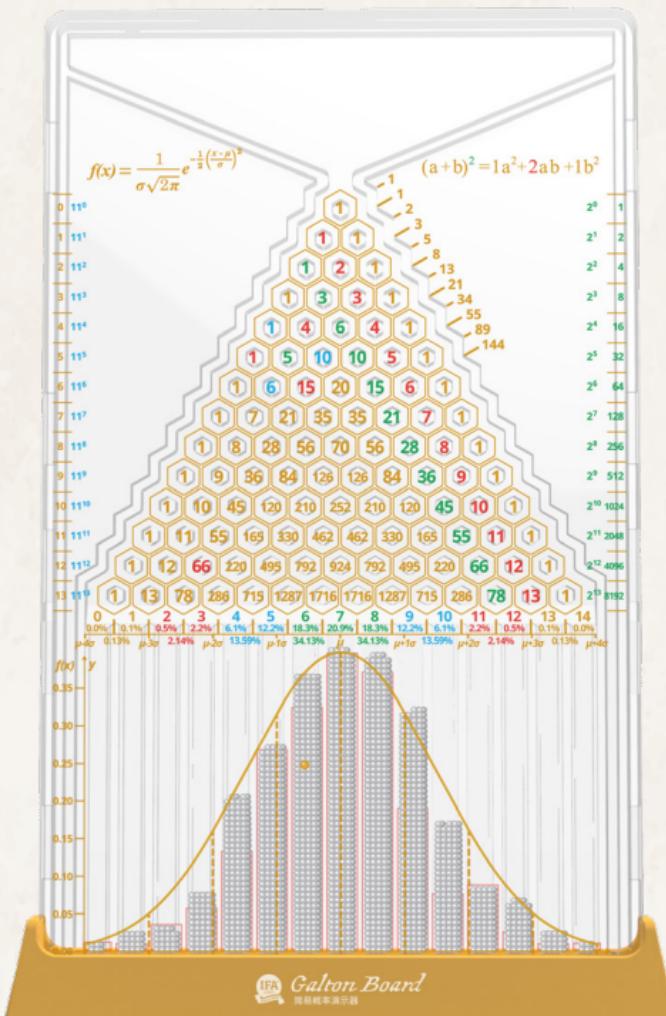




# Galton Board

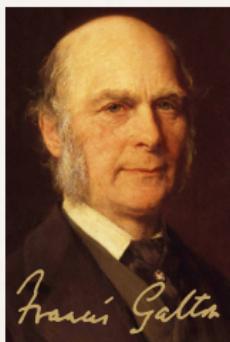
简易概率演示器



用户指南

# 高尔顿板

高尔顿板(简易版)结合帕斯卡三角形,是一个 $150\text{ mm} \times 95\text{ mm}$ 的概率演示器,能够通过动态数学模型直观呈现概率与统计的底层规律。高尔顿板背面印有理论投资组合直方图,用以阐释金融市场回报的随机性特征及其概率分布规律。



Sir Francis Galton

高尔顿板以一种创新、动态桌面装置的形式直观呈现了传承数百年的数学概念。其设计源于弗朗西斯·高尔顿爵士 (1822–1911) 1873 年的经典发明,通过六边形阵列与大量钢珠的互动,生动演绎了二项分布趋近正态分布的过程,正是概率论中著名的中心极限定理。令这位统计学家震撼的是,看似无序钢珠在其钉板阵列中的随机碰撞,最终竟精确地呈现出钟型曲线的数理秩序之美。根据中心极限定理,更准确地说,是棣莫弗 (1667–1754)-拉普拉斯 (1749–1827) 定理 (Moivre-Laplace),正态分布在特定条件下可被用作二项分布的近似分布。

当高尔顿板被倒置时,钢珠会全部流回顶部储珠仓。若将其重新正置并保持水平,4280 颗钢珠和一颗金色示踪珠便会从储珠仓中倾泻而下,穿过板上 14 层对称排列的六边形钉阵。在该装置处于水平状态时,下落的钢珠与 105 枚六边形钉碰撞时向左或右偏离的概率完全均等。当钢珠最终落入板底 15 个收集槽时,其堆积形态完美呈现出一个钟形分布直方



高尔顿爵士的原始手绘设计图

图。翻转高爾頓板的动作相当于在大约两秒钟内模拟完成 59,920 次抛硬币实验。其中代表连续 14 次正面的钢珠会落入 14 号收集槽，而展现全部 14 次反面的钢珠会准确落入 0 号收集槽。

该装置顶部铭刻着正态分布与二项式展开的核心数学公式。在高爾頓板底部区域，清晰印制着正态分布或钟形曲线图，以及与之对应的均值线、标准差标记线。这条钟形曲线（亦称高斯分布，得名于数学家卡尔·弗里德里希·高斯 [1777–1855]）在统计学与概率论中至关重要。不仅能够模拟高爾頓板钢珠的分布轨迹，更广泛适用于自然科学与社会科学领域内各类随机变量的描述，例如股票市场月度收益率的变化规律。装置图示中还呈现了坐标轴的刻度说明，带编号的收集槽旁详细标注着理论预期的百分比分布与钢珠数量。



Blaise Pascal

六边形钉阵表面覆刻着帕斯卡三角形（布莱兹·帕斯卡，1623–1662），这种数字阵列遵循上方两数相加得到下方数字的构成法则。每个六边形位置标注的数值，代表着钢珠从顶端起始位置到达该处所有可能路径的数量。此外，装置还通过帕斯卡三角特定对角线的数值之和，直观展示了斐波那契数列（列奥纳多·斐波那契，1175–1250）的生成规律。在帕斯卡三角体系中，有多种数学属性和规律图式。其中包括：自然数序列、行总和、 $11$  的幂次展开、 $2$  的幂次递进、拟形数排列、大卫之星定理和曲棍球杆图型。当前装置虽未全部标注，但帕斯卡三角形还包括质数分布；

平方数序列；二进制数；卡特兰数；二项式展开；分形构造；黄金比例关系；以及谢尔宾斯基三角形。

在这 4280 颗钢珠中特别配置了一颗金色示踪珠，用于直观展现单个随机事件的发展过程。每个收集槽顶部显示的数字是对钢珠落入该收集槽概率的百分比估计。通过跟踪金色示踪珠的运动，可以在每次翻转高尔顿板时直观看到这些概率分布。通过背面红色的投资组合直方图，这枚金色示踪珠可以模拟下个月股票市场收益的可能区间及其对应概率。高尔顿板对金色示踪珠最终落入特定收集槽的概率计算，实际上替代了预测者对市场走势的预估判断。

这个高尔顿板装置蕴含了诸多统计学与数学原理，包括概率理论、独立同分布 (iid) 随机变量、正态或钟形曲线、中心极限定理（棣莫弗-拉普拉斯定理）、二项分布、伯努利（1655-1705）试验、均值回归、大数定律、涵盖抛硬币结果与股市回报率等具体场景的概率问题、随机游走模型、赌徒谬误思维陷阱、误差频数定律以及弗朗西斯·高尔顿爵士提出的“非理性法则”。



*Galton Board*  
简易概率演示器

# 高尔顿爵士的论说

弗朗西斯·高尔顿爵士在其 1889 年出版的《自然遗传》著作中，生动描述了他创造这个装置的核心价值——在看似混沌的现象中揭示秩序本质。下文引自这部 136 年前著作的修改节选段落。文本措辞稍作调整，以符合当前高尔顿板装置的术语体系。

## 统计学之魅力

“为何统计学家们总是将研究局限于平均数，而不陶醉于更全面的视野？他们的灵魂似乎对多样性的魅力无动于衷，恰似英格兰平坦郡县出身的某位人士回忆瑞士时所言：‘若能将瑞士山脉投入湖泊，便可一举消除两大烦扰。’平均数不过是一个孤立的事实，但若在此基础之上增添另一事实，一整套与观测结果高度契合的正态分布模型便即刻呼之欲出。”

“有些人甚至非常讨厌统计学这个名称，而我却觉得这门学科处处蕴藏着精妙趣味。只要不以野蛮手段粗暴对待，改用高阶方法巧妙处理，辅之以审慎解读，统计学处理复杂现象的能力堪称超凡。在探索人类科学的过程中，唯有统计学这把利器，方能在荆棘之墙中开辟一条道路。”

## 频率曲线成因的机械演示

“频率曲线与分布曲线具有可相互转换性；因此只要阐明其中任意一条曲线的生成原理，另一条的奥秘也便迎刃而解。现在我将通过一个（此处展示的）精巧装置，以极具美感的方式演示偏差形成条件，从而揭示频率曲线的起源。”

我们设计的高爾頓板采用防静电塑料框架构建。板体顶端特别设置了用于容纳滚珠的储珠仓。在漏斗出口下方依次排列着 14 排呈六边形布局的钉阵——与高爾頓板上的销钉原理相似，这些钉阵垂直固定于背板表面。钉阵底部是一排 15 个收集槽，即纵向分隔的收集隔舱。装置内置有 4,280 颗钢珠。当整块实验板“倒置”翻转时，所有钢珠都会汇聚至顶端的储珠仓；待恢复实验位置后，就会开始预设的钢珠运动。储珠仓边缘经过特殊设计，能够将集聚于框架顶部的所有钢珠引导至漏斗入口处。

“钢珠经漏斗落下后，会以一种奇特有趣的轨迹穿梭于六边形钉阵之间——每当碰撞到钉柱时，钢珠便会视情况随机向左或向右急速转向。钉阵采用梅花形阵列排布，确保每颗下落的钢珠在逐层穿越时都会与每行的钉柱产生碰撞。从漏斗倾泻而出的珠流在下落过程中逐渐扩散，最终所有钢珠在脱离末排钉柱后都会精准落入对应的收集槽内。各个收集槽内堆积的钢珠分布轮廓趋近于频率曲线，且无论重复多少次实验，其形态特征都近乎完全一致。”

“该装置的工作原理是，每颗钢珠在下落过程中都会经历一系列微小且相互独立的随机事件。极少数情况下，个别钢珠会因持续获得单向作用力而滑向两侧边缘的收集槽，但大多数情况下，引发右向偏移的随机事件数量，总能以某种比例抵消导致左向偏移的事件总量。因此，大多数钢珠最终会汇聚于以漏斗出口垂直线为中心轴分布的收集槽群中，而且钢珠向轴线左右两侧不同距离外溢的频次，其下降速率远超过距离增幅的速率。”

## 混乱表象下的秩序

“我几乎找不到任何事物能像‘误差频率定律’所展现的宇宙秩序之美这般震撼心灵。这项定律若为古希腊人所知晓，必将被赋予神格、跻身众神殿堂。它以超然的姿态隐没于混沌之中。群体越是庞杂无序，其统御力便愈显完美。这是非理性世界至高无上的铁律。当我们对海量混沌元素进行量级排序时，总能发现某种隐秘却精妙绝伦的规律性始终潜藏其间。有序排列的收集槽顶部会形成一条比例恒定的流动曲线；当个元素归位时，仿佛都能寻获与其形态完美契合的预定归属位置。即便仅掌握收集槽中任意两个特定等级的量测数据，除接近分布极值的区域，其余所有等级的数值皆可按照已经解释过的方法精确预测。”

1 帕斯卡三  
角形

2 正态分布公式

4 行序与  
11的  
幂次

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

3 二项式定理

5 行总和  
与2的  
幂次

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

0 1<sup>10</sup>  
1 1<sup>11</sup>  
2 1<sup>12</sup>  
3 1<sup>13</sup>  
4 1<sup>14</sup>

5 1<sup>15</sup>  
6 1<sup>16</sup>

7 1<sup>17</sup>

6 大卫之星  
定理

5 五点梅花  
形排

7 曲棍球杆  
图案

6 斐波那契数与黄  
金分割率

8 对角线与  
三角数

2<sup>0</sup> 1  
2<sup>1</sup> 2  
2<sup>2</sup> 3  
2<sup>3</sup> 8  
2<sup>4</sup> 16  
2<sup>5</sup> 32  
2<sup>6</sup> 64  
2<sup>7</sup> 128  
2<sup>8</sup> 256  
2<sup>9</sup> 512

7 13  
8 21  
5 34  
55 89  
144

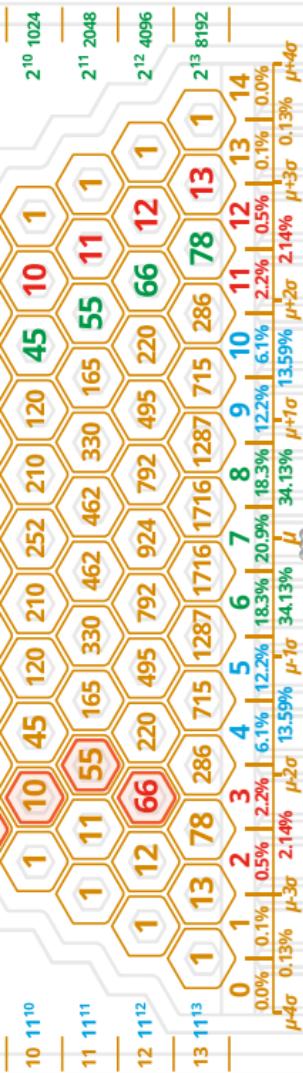
1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 6  
1 7  
1 8  
1 9  
1 10  
1 11  
1 12  
1 13  
1 14  
1 15  
1 16  
1 17

1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 6  
1 7  
1 8  
1 9  
1 10  
1 11  
1 12  
1 13  
1 14  
1 15  
1 16  
1 17

1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 6  
1 7  
1 8  
1 9  
1 10  
1 11  
1 12  
1 13  
1 14  
1 15  
1 16  
1 17

1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 6  
1 7  
1 8  
1 9  
1 10  
1 11  
1 12  
1 13  
1 14  
1 15  
1 16  
1 17

1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 6  
1 7  
1 8  
1 9  
1 10  
1 11  
1 12  
1 13  
1 14  
1 15  
1 16  
1 17



12 收集槽编号、预期百分比和标准差

14 钟形曲线

16 标准差线

13 钢珠的二项分布

15 金色示踪珠

11 概率密度

# 高爾頓板的特点

## 1 帕斯卡三角形

帕斯卡三角形是一个数字三角形，遵循基础叠加法则——将上方两个数字相加得到下方数字。这种数理模式具备无限延展性。布莱兹·帕斯卡在1665年《算术三角论》中系统研究了该阵型与概率理论的关联。但早在其研究前数百年，波斯、印度、中国、德国和意大利数学家就已对此开展探索。三角阵精妙展现了二项式系数的数学本质特性。当应用于高爾頓实验板时，六边形钉阵中的每个节点数值，精确对应着钢珠抵达该位置所有可能路径的数量总和。



## 2 正态分布公式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

在概率论中，正态分布是实值随机变量的一种连续概率分布形态。如图所示为该分布概率密度函数  $f(x)$  的基本表达式。正态分布在统计学中具有核心地位，自然科学与和社会科学领域常借助其表征分布特性未知的实值随机变量。该数学表达式包含圆周率  $\pi$  ( $\pi \approx 3.142$ )——源自圆周周长与直径之比的经典常数。同时引入自然对数的底数 ( $e \approx 2.718$ )——即欧拉数。基于独立同分布的中心极限定理：当样本量充分扩大且标准差 ( $\sigma$ ) 保持有限值时，随机变量  $x$  将趋近于正态分布形态。

### 3 二项式定理

二项式定理阐释了二项式代数幂的展开规律。帕斯卡三角形精确界定了二项式展开式中系数的排列规律。这意味着帕斯卡三角形的第  $n$  行元素恰为多项式  $(a + b)^n$  展开式的各项系数。在高尔顿板实验装置中，此类二项式特指左右方位变量组合  $(L + R)^n$ 。

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(L+R)^3 = 1L^3 + 3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

$(a + b)^n$  的展开式为  $(a + b)^n = x_0 a^n + x_1 a^{n-1}b + x_2 a^{n-2}b^2 + \dots + x_{n-1} ab^{n-1} + x_n b^n$ ，其中各分项前的  $x_k$  系数值精确对应帕斯卡三角形第  $n$  行数轴第  $k$  个位置所载的数值（ $k$  和  $n$  计数皆从0开始计算）。这可以表示为： $x_k = \binom{n}{k}$ ，即“ $n$  选  $k$  组合”。高尔顿板上的首个六边形节点为  $\binom{0}{0}$ ，下方两个节点则对应  $\binom{1}{0}$  和  $\binom{1}{1}$ 。

实验板展示了两种二项式表达式： $n = 2$  时的  $(a + b)^n$ ；以及  $n = 3$  时的  $(L + R)^n$ 。

### 4 行序与 11 的幂次

左侧展示的帕斯卡三角形的前 14 行序号，其中首行定义为  $n = 0$ ，各行首个元素设定为  $k = 0$ 。选取十四行样本量可确保生成的二项分布形成对连续型正态分布较佳的离散型近似。

若将每行的每个元素视为数位进行纵向整合(当元素超过个位数时自动向左进位),则会显现 11 的 n 次幂数 ( $11^n$ ):1, 11, 121, 1331, 14641……这与帕斯卡三角形对应行中的数值结构完全吻合。

## 5 行总和与 2 的幂次

每行元素之和等于  $2^n$ , 其中 n 表示行序号。以第三行为例: 将帕斯卡三角形的数值相加,  $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ , 恰好对应  $2^3$  的计算结果。

各行的累加值均标注于对应  $2^n$  表达式右侧, 且数值呈现逐行倍增规律。另外, 任一行元素平方和恒等于中心位元素值与行序数乘积的两倍。例如第四行元素平方和  $(1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2)$ , 结果等于 70, 恰为第八行中心位元素值。

## 6 斐波那契数与黄金分割率

帕斯卡三角形中特定对角线元素之和精确吻合斐波那契数列。该数列按以下顺序演进:1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 依此类推。数列中的任意数值均为前两项之和。例如: $2 + 3 = 5$ ;  $3 + 5 = 8$ ;  $5 + 8 = 13$ ;  $8 + 13 = 21$ ……莱昂纳多·斐波那契在 1202 年著作《算盘之书》中系统阐述了该数列。随着斐波那契数列项数增长, 连续斐波那契数的比值无限趋近于黄金分割率 ( $\Phi$ ) 1.61803398…… 但永远保持渐进逼近的数学特性。例如: $55/34 = 1.618$ ;  $89/55 = 1.618$ ; 以及  $144/89 = 1.618$ 。黄金分割率最早由欧几里得在其公元前 300 年所著的《几何原本》中定义。列奥纳多·达·芬奇运用这一比例构建了他的杰作。黄金分割率的公式为:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 7 大卫之星定理

大卫之星定理表明，任一数值周围的两组三数组合之乘积恒相等。在所示示例中，数值 5 依次被 1、4、10、15、6、1 环绕，选取间隔的数值组合，即可得到  $1 \times 10 \times 6 = 4 \times 15 \times 1 = 60$ 。

## 8 五点梅花形排

高爾頓板上的六邊形呈五點梅花形排，即五個物体排列成正方形或矩形的四角各有一個，第五個位於中心位置（類似骰子上的 5 點）。



## 9 对角线与三角数

对角线包含单形的形数，左右边缘仅由 1 构成。后续对角线包含自然数或计数数、三角数（等边三角形排列的点数）、四面体数（三角锥数）、五胞体数以及随后的 5、6 和 7 单形数。每个自然数的平方等于第三对角线（三角数）上相邻两项之和。例如： $7^2 = 49 = 21 + 28$

## 10 曲棍球杆图案

从包含 1 的边缘开始的对角线数字之和等于下方相邻对角线上的数字。排列这些数字可呈现出曲棍球杆图案案，例如此处所示的  $1 + 10 + 55 = 66$ 。

## 11 概率密度

概率密度  $f(x)$  是观测值与其概率之间的关系。它定义了连续随机变量在特定区间内出现的概率。一个重要的概率密度函数是高斯(正态)随机变量的概率密度函数，其形状类似钟形曲线。这些  $f(x)$  值假定其服从标准差 ( $\sigma$ ) 为 1 的正态分布。

## 12 收集槽编号、预期百分比和 标准差

15 个钢珠收集槽从 0 到 14 编号，可轻松识别并记录金色示踪珠的位置。此外，通过想象帕斯卡三角形的第 15 行 ( $n = 14$ )，可确定某个收集槽内随机结果的概率。

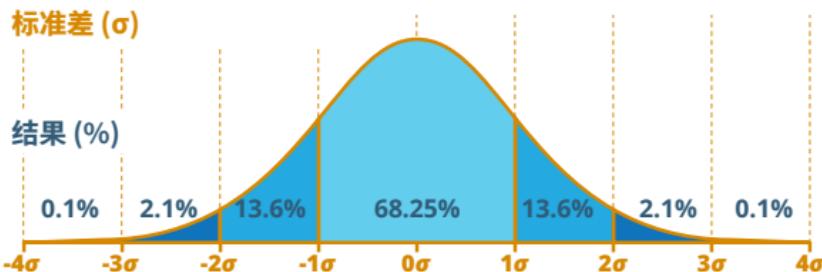
每个收集槽的预期结果百分比显示在收集槽编号正下方，中间收集槽(7号)的预期百分比为 20.9%。

收集槽信息轴下方为标准差轴线。曲线上每条标准差线上方均标注了其与均值的标准差数，最多 4 个标准差 ( $\mu \pm 4\sigma$ )。使用箭头标明  $\pm 4$  个标准差延伸至最后一个收集槽之外。钟形曲线中心的线为平均值(均值， $\mu$ ，读为“mu”)。每条标准差线之间的区域标注了该区域钟形曲线对应的预期结果百分比。

## 13 钟形曲线

正态分布通常被称为“钟形曲线”，是所有概率分布中最广为人知且使用最广泛的一种。由于正态分布能很好地近似许多自然现象，它已发展为众多概率问题的标准参考依据。多组数据服从正态分布，例如成

人身高、婴儿体重、课堂考试成绩、股票市场指数的大样本月度收益率以及高尔顿板中的钢珠运动轨迹。下图展示了按标准差划分的钟形曲线。



该高尔顿板装置中小六边形和通道的限制使钟形曲线更为宽泛。我们在高尔顿板上印制的“最佳拟合”曲线与上面所示曲线略有不同。

## 14 钢珠的二项分布

每颗钢珠代表一个独立同分布 (iid) 的随机变量，从储珠仓通过固定的六边形排列下落。数千颗钢珠经过 14 次伯努利试验 (每个六边形的碰撞代表一次试验) 形成了二项分布。钢珠的离散二项分布非常近似于连续的正态分布。

## 15 金色示踪珠

在 4,280 颗 0.8 mm 的钢珠中混有一颗 2.0 mm 的金色示踪珠。该金色示踪珠展示了单颗钢珠的随机结果。

## 16 标准差线

标准差 ( $\sigma$ ) 是衡量所有数据点围绕均值 ( $\mu$ ) 聚集紧密程度的指标。正态分布的形状由均值和标准差共同决定。在正态分布中，约 68% 的数据落在均值的一个标准差范围内。约 95% 的数据落在均值的两个标准差范围内，约 99.7% 的数据落在三个标准差范围内，约 99.99% 的数据落在四个标准差范围内。在帕斯卡三角形的 14 行六边形构型中，三角底行共有 14 个六边形。共设有 15 个收集槽，每个六边形的两端和相邻六边形之间均设有一个收集槽。这 15 个收集槽总计对应  $2 \times 15/14 = 8.0$  个分布标准差 ( $\mu \pm 4\sigma$ )。每个收集槽相当于 0.533 个标准差，每个标准差对应 1.875 个收集槽 ( $8/15 = 0.533$  或  $15/8 = 1.875$ )。

样本的  
标准差

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

总体的  
标准差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

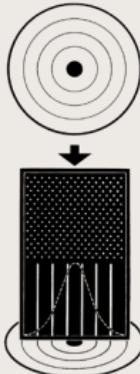
## 伊姆斯对高尔顿板的诠释

### 伊姆斯为其高尔顿板设计的信息图

我们的高尔顿板是一种桌面设计，灵感源自查尔斯和雷·伊姆斯开创性设计的 11 英尺高“高尔顿概率板”，该作品曾在 1961 年“数学：数字世界……及超越” (Mathematica: A World of Numbers. . .and Beyond) 展览中展出。一个更大的 14.5 英尺高伊姆斯概率板曾在 1964 年纽约世界博览会 IBM 展馆展出。右图为 1961 年“数学世界”展览信息标志的迷你版本。

# PROBABILITY BOARD

THIS MACHINE  
DEMONSTRATES  
HOW A PROBABILITY  
CURVE CAN BE  
FOUND BY  
EXPERIMENT



HORACE HAS A  
DEFINITE PROBABILITY OF  
HITTING THE BULLSEYE

HE CAN GET AN IDEA OF THIS PROBABILITY BY COUNTING THE NUMBER OF DARTS THAT HIT THE BULLSEYE, AND COMPARING IT WITH THE TOTAL NUMBER HE THROWS.

THE MORE DARTS HE THROWS, THE BETTER HIS CHANCES OF GETTING A GOOD ESTIMATE.



IN EFFECT, THE GALTON BOARD THROWS A BALL AT THE CENTER BOX. THE PINS INTRODUCE ERRORS (AS HORACE DOES) THAT MAKE MOST OF THE BALLS MISS THE BULLSEYE.

WE CAN ESTIMATE THE PROBABILITY OF HITTING A GIVEN BOX BY COUNTING THE NUMBER OF BALLS THAT LAND IN THE BOX.

NOTICE HOW CLOSELY THE CURVE FORMED BY THE BALLS MATCHES THE CURVE PAINTED ON THE GLASS

A ball can land in any box, and yet any given box fills to nearly the same height each time the experiment is repeated. THIS STABILITY IS DUE TO THE FACT THAT THERE ARE MANY BALLS.

**Unpredictable**

**More Predictable**

IF A RANDOM EVENT HAPPENS A GREAT MANY TIMES THE AVERAGE RESULTS ARE LIKELY TO BE PREDICTABLE.\*

\*The first mathematical theorem of this kind was proved by Jacob Bernoulli.

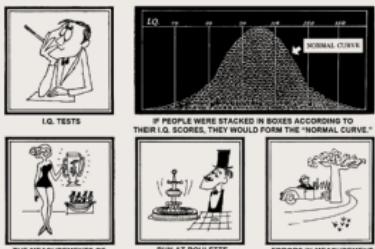
"With the probability approaching certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event in a series of independent trials will differ from its probability will differ from that probability by less than any given positive number, provided the number of trials is sufficiently large."

"RELATIVE FREQUENCY" is the number of times an event<sup>†</sup> occurs divided by the number of trials.<sup>‡</sup>

In the Probability Board the relative freq. of a ball is = THE PROBABILITY OF Landing (or not landing) in a given box is = THE EVENT.

The curve painted on the glass was calculated by a formula.

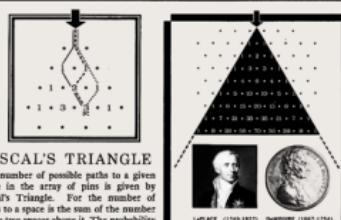
THIS CURVE IS A PARTICULAR THEORETICAL CURVE CALLED THE "NORMAL CURVE," WHICH DESCRIBES THE BEHAVIOR OF SUCH THINGS AS—



WHEN THE BALLS ARE DROPPED, THEY ARE ALL AIMED AT THE CENTER BOX. THE SUM OF ALL THE ERRORS CAUSED BY HITTING THE PINS DETERMINES THE BALLS' FINAL POSITION.

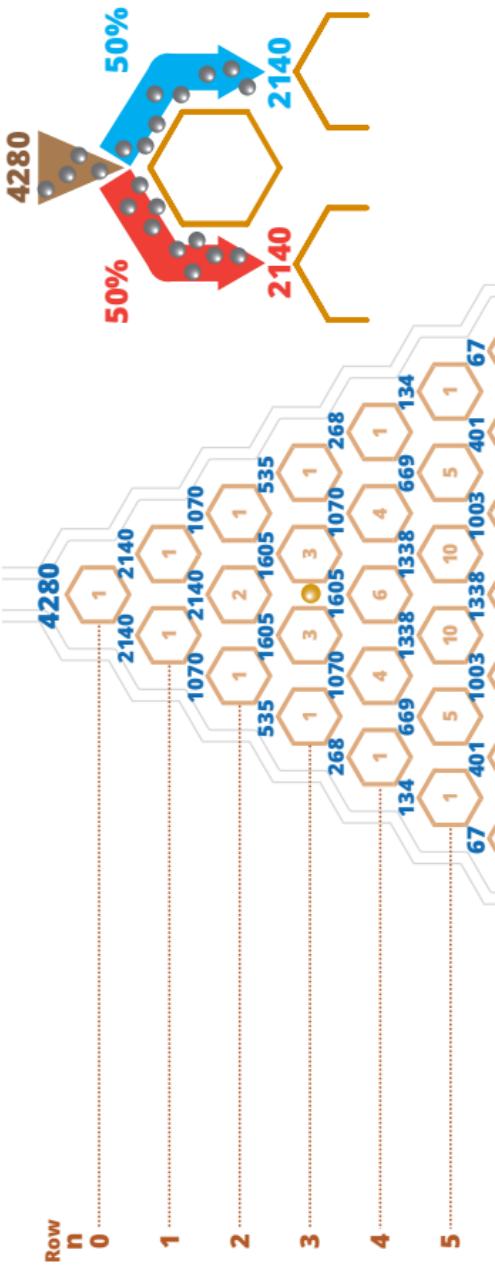
The average of many independent errors almost always leads to the Normal Curve, no matter what the underlying process may be.

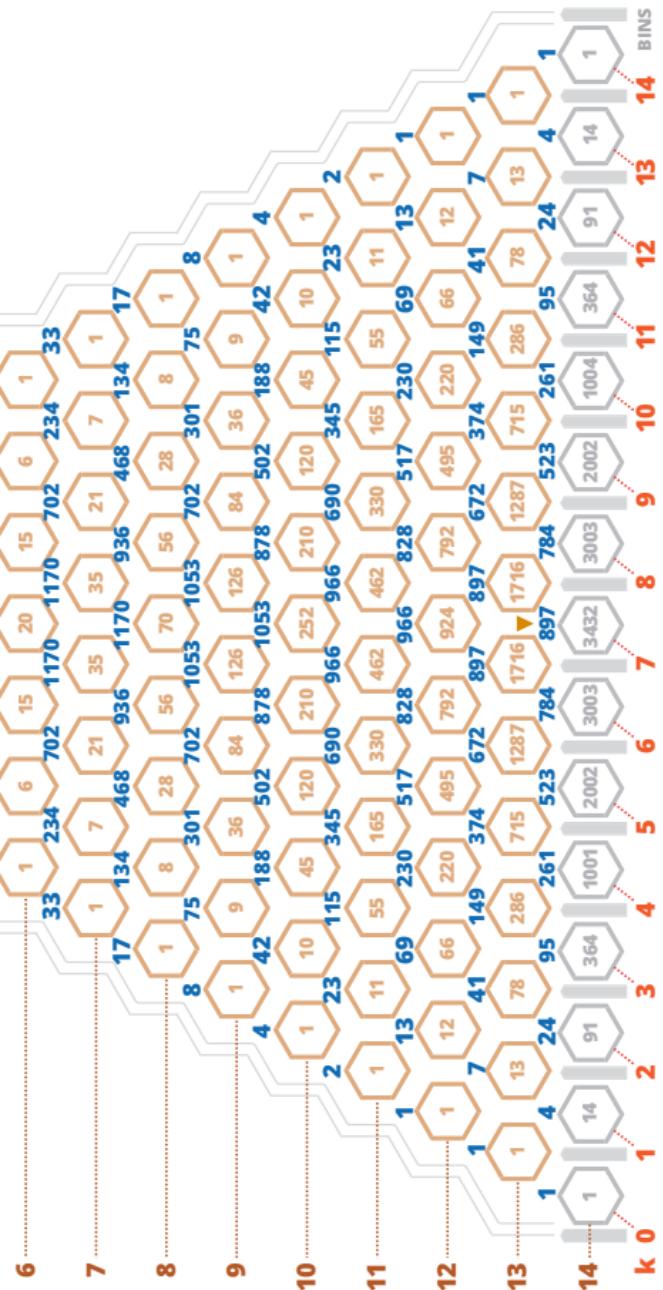
THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IS A PRECISE STATEMENT OF CONDITIONS WHICH LEAD TO THE NORMAL CURVE.



# 钢珠的对称二项分布

在水平高尔夫板上，钢珠在每个六边形顶部向左或向右移动的概率均等。这是伯努利试验的一个实例。此图展示了各六边形通道预期通过的钢珠数量。储珠仓内装有约 4,280 颗钢珠。首个六边形(第零行)处,预计将有 2,140 颗钢珠向左移动,2,140 颗钢珠向右移动。若逐次追踪钢珠的分流路径,可观察到经过第 14 行(第 13 行)后每个收集槽的预期落珠数量。帕斯卡三角形所有六边形的数值可解释为到达第  $n$  行第  $k$  个位置的路径总数。例如,第 4 行六边形的数值依次为 **1,4,6,4,1**。这些数值相加总计 16 条路径,对应到达第 4 行全部 5 个六边形的路径总数。该总数也等于行数的 2 次幂结果 ( $2^4 = 16$ )。



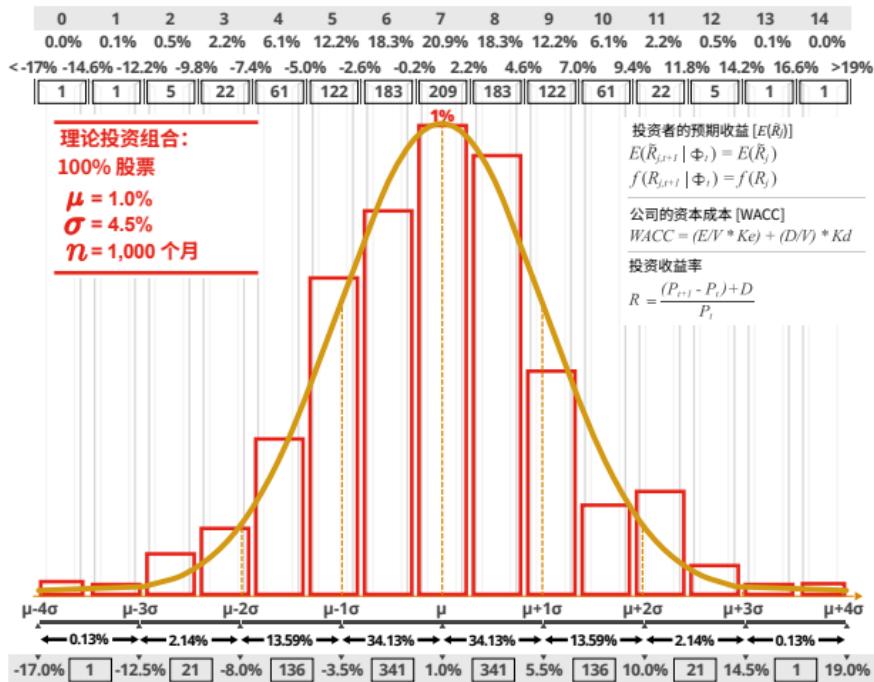


帕斯卡三角形第 14 行(灰色部分)可用于确定钢珠落入高爾頓板底部 15 个收集槽的概率(对称二项分布)。按照上文  $n=4$  的计算结果,第 14 行中间收集槽 ( $k=7$ ) 的预期百分比为  $3,432/16,384=20.95\%$ 。若以 4,280 颗钢珠为总量,预计将有 897 颗钢珠落入该收集槽。若有 16,384 颗钢珠,则第 14 每个六边形的数值将等于对应收集槽的预期落珠数量。

# 与股票市场的对比

## 投资组合示例图示

为呈现市场收益表现，我们选取了一个理论投资组合模型。装置背板印制的红色条形图展示了该理论投资组合 1,000 个月度收益的分布直方图。红色条形代表 100% 股票投资组合（激进型），其参数设定为月均收益率 1.0%，标准差 4.5%，样本周期为 1,000 个月。在四个标准差范围内，收益率波动范围约为 -17% 至 19% [计算公式： $1 - (4 \times 4.5) = -17$ ,  $1 + (4 \times 4.5) = 19$ ]。这意味着通过 15 个收集槽，每个收集槽对应的收益区间跨度为 2.4%，且 1.0% 的均值点恰好位于中心。

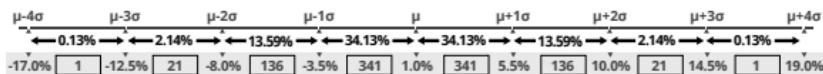


## 收集槽分隔线及预期百分比与收益分布

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.0%	0.1%	0.5%	2.2%	6.1%	12.2%	18.3%	20.9%	18.3%	12.2%	6.1%	2.2%	0.5%	0.1%	0.0%
-17%	-14.6%	-12.2%	-9.8%	-7.4%	-5.0%	-2.6%	-0.2%	2.2%	4.6%	7.0%	9.4%	11.8%	14.2%	16.6%
1	1	5	22	61	122	183	209	183	122	61	22	5	1	1

市场收益直方图上方有四个标度需要考虑。第一个标度显示了 15 个收集槽的 0–14 编号标记。第二个标度显示了预期落入各收集槽的随机变量占比(此处特指月度收益分布概率)。第三个标度显示了各收集槽对应月度收益区间的预期百分比估计值。收集槽分隔线标度设定使高尓頓板的边界与收益的四个标准差范围相对应(覆盖  $\approx 99.99\%$  的结果分布,或  $\mu \pm 4\sigma$ )。最后一行标度值表示基于 1,000 个月样本量的各收集槽预计月份数。

## 底部坐标轴



底部坐标轴上有三个标度。第一个标度标注了标准差线。第二个标度标注了各标准差线之间的预期结果百分比。第三个标度显示了基于 1,000 个月样本量的各标准差线之间的预期月度收益数据。

## 随机游走模型

有效市场假说阐明,证券( $j$ )的当前价格( $p_{j,t}$ )充分反映了全部可获益信息( $\Phi_t$ ),该结论可推导出“……连续价格变动,或更常见的连续一期收益呈现序列独立性。其同时假设连续价格变动或收益具有相同的

分布属性。此两项核心假设共同构成了完整的随机游走模型。该模型的形式化表达为：

$$f(R_{j,t+1}|\Phi_t) = f(R_j),$$

该等式阐明了独立随机变量的条件概率分布和边际概率分布必然保持同一性这一命题。同时模型严格约束密度函数 ( $f$ ) 在所有时间点 ( $t$ ) 上保持恒定不变。”若进一步假设证券的预期收益具备时序恒定性，则可以得出

$$E(\tilde{R}_{j,t+1}/\Phi_t) = E(\tilde{R}_j).$$

来源：Eugene F. Fama & Merton H. Miller，《金融理论》，1972 年，第 339 页

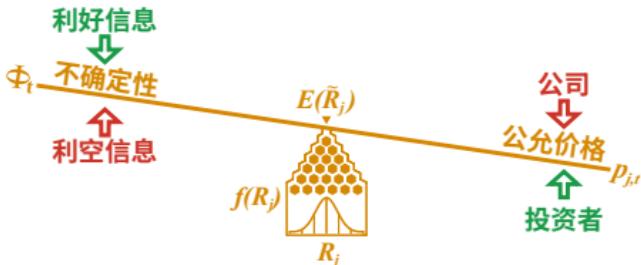
## 赫伯纳模型

以下杠杆平衡示意图展示了尤金·法玛的有效市场假说：所有证券 ( $j$ ) 的市场价格充分反映了所有可获得信息，由此形成公允价格。杠杆左端代表时间点 ( $t$ ) 完全反映在价格中的信息集合 ( $\Phi_t$ )，右端代表数百万愿意交易的买卖双方基于该时间点信息集所形成的公允价格 ( $p_{j,t}$ )。有效市场假说断言，在一个组织完善且具备合理透明度的市场中，证券市场价格 ( $p_t$ ) 通常等同或逼近公允价值，因为投资者能够快速整合反映相对稀缺性、资产效用及预期收益的新信息 ( $\Phi_t$ )，并即时作用于现金与证券交换中。

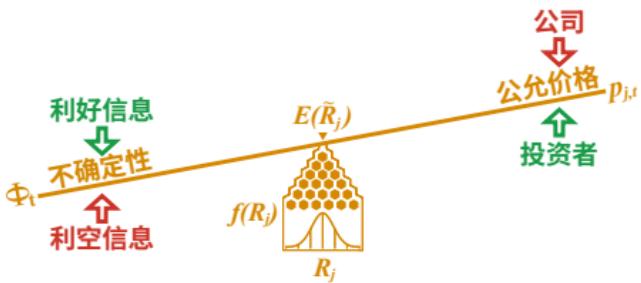
该模型的三个核心要素由马克·赫伯纳在 2008 年全球金融危机期间形成理论雏形。模型初始状态为帕斯卡三角形顶端设置的平衡杠杆

装置。钢珠随后在六边形阵列中无序弹跳并穿过，模拟了股票市场月度收益 ( $R_{j,t+1}$ ) 的随机属性。钢珠最终落入代表实际收益率 ( $R_j$ ) 的收集槽，大量样本条件下，其分布趋近于钟形曲线 ( $f(R_j)$ )。

随机且持续流动的利好/利空信息和市场预测预测，动态映射着投资在恒定风险水平下预期收益 ( $E(\tilde{R}_j)$ ) 的不确定性。若利空信息导致不确定性上升，证券价格必须相应折价调整，使预期收益维持恒定水平。



若利好信息使不确定性降低，证券价格也必须同步溢价调整上升，使预期收益保持平衡。



该模型被称为赫伯纳模型，其本质是将高顿板和帕斯卡三角形引入市场运作机制的一个解释框架。

## 资本成本

在经济学和会计学领域，资本成本是指公司资金（包括债务和股权）的成本，或者在投资者层面，是指公司现有证券的必要回报率要求。该指标亦可用于公司的新项目评估。本质上这是投资者为公司提供资本所要求的最低预期回报，由此确定了新项目必须达成的基准门槛。

$$WACC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)$$

$E$  表示公司股权的市场价值。

$V$  表示股权和债务的总市场价值，即  $E + D$ 。

$Ke$  表示股权成本。

$D$  表示公司债务的市场价值。

$Kd$  表示债务成本。

$WACC$  表示加权平均资本成本。

特别提示：投资者的预期收益也是卖方的资本成本 ( $E(\tilde{R}_{j,t}) = WACC$ )。

## 投资收益率公式

一项投资的实际收益/损失 ( $R$ ) 的计算公式等于价格变动 ( $P_{t+1} - P_t$ )，加上持有期间支付给投资者的股息或现金 ( $D$ )，再除以该投资的初始价格 ( $P_t$ )。

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

## 法玛/弗伦奇因子模型

### 法玛/弗伦奇股票五因子模型

法玛/弗伦奇股票五因子模型是一种资产定价模型，旨在捕捉平均股票收益中的市场、规模、价值、盈利能力和投资模式。该模型由诺贝尔奖得主尤金·法玛其合著者兼同事肯尼斯·弗伦奇于 2014 年共同提出。该模型解释了五因子股票多元化投资组合预期收益横截面方差中 71% 至 94% 的波动。该模型也是资本资产定价模型 (CAPM, 1964

年)及法玛/弗伦奇三因子模型(1993 年)的扩展。法玛/弗伦奇五因子模型方程是运用法玛和弗伦奇创建的一系列研究指数进行的时间序列回归,这些指数包含不同公司特征的长期历史股价数据。每个因子(自变量)的系数代表投资组合对该因子的敞口或倾斜程度。若市场( $b_i$ )、规模( $s_i$ )、价值( $h_i$ )、盈利能力( $r_i$ )和投资( $c_i$ )这五个因子的敞口能够捕捉预期收益的所有变化,那么下述方程中的阿尔法截距( $a_i$ )对所有证券和投资组合( $i$ )均为零。

$$R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{it}$$

$R_{it}$  表示投资组合  $i$  在  $t$  期的收益(因变量)。

$R_{Ft}$  表示无风险收益。

$R_{Mt} - R_{Ft}$  表示市值加权股票市场与现金之间的收益差额。

$SMB_t$  表示小型股票多元化投资组合的收益减去大型股票多元化投资组合的收益(即规模效应)。

$HML_t$  表示高市净率(BtM)与低市净率股票多元化投资组合收益之间的差值(即价值效应)。

$RMW_t$  表示盈利能力强劲与疲弱股票多元化投资组合收益之间的差值。

$CMA_t$  表示低投资与高投资公司股票多元化投资组合收益之间的差值,法玛/弗伦奇将这两类公司分别称为保守型和激进型。

$e_{it}$  表示误差项,是一个均值为零的残差。

来源:Fama、Eugene F. 和 French, Kenneth R.,《五因子资产定价模型》(2014 年 9 月)。

# 我对高爾頓板的痴迷



马克·T·赫伯纳  
(Mark T. Hebner)

我的名字是马克·T·赫伯纳 (Mark T. Hebner), 是 Index Fund Advisors, Inc. 的首席执行官兼创始人。我公司从事财富管理和税务申报业务。 我还设计制作了多种现代高爾頓板。

描述一项投资风险与收益的最常见方式是通过大量历史收益样本(如 1,000 个月的指数数据)估算其平均收益和收益标准差。若想用 Excel 绘制钟形曲线, 只需平均值和标准差两个参数即可。这两个参数定义了钟形曲线。事实上, 哈里·马科维茨 (Harry Markowitz) 获得诺贝尔奖的“平均收益-标准差”散点图研究本质上提供了不同钟形曲线之间的对比。因此, 当我发现能生成钟形曲线的实体装置时, 可以想象我当时的兴奋之情。我意识到它有能力展示市场运作方式及多种不同结果出现的概率。我还想到, 高爾頓板可以模拟月度投资收益, 能够让人们直观看到稳定的预期收益、30 天周期内收益的随机性以及超长期限下实际收益所形成的钟形曲线。简言之, 该装置能帮助投资者理解关键的投资理念。

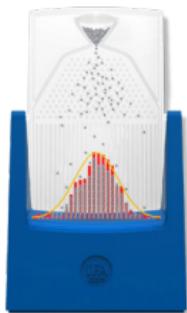
早在 2005 年, 我观看了 Eames Office 一部关于 1964 年世博会的影片, 从此对高爾頓板产生了浓厚的兴趣。查尔斯·伊姆斯 (Charles Eames) 曾为 IBM 展馆建造了一个户外版 14.5 英尺高的高爾頓板, 其设计灵感源自他此前为“数学:数字世界……及超越” (Mathematica: A World of Numbers....and Beyond) 展览所做的

设计。“数学世界”是 Eames Office 利用 IBM 赞助推出的首个完全沉浸式大规模主题展览。该展览专为 1961 年洛杉矶加州科学与工业博物馆新科学展厅的开幕而设计。

我的首个高尔顿板（如图所示）是由俄勒冈科学与工业博物馆设计制造的。这幅照片展示了 2009 年我委托制作的博物馆级概率演示装置：高 8 英尺、宽 4 英尺。该装置旨在向投资者阐释一系列随机事件所产生的收益范围、概率和分布形态。此高尔顿板现存于 Index Fund Advisors 办公室大厅，它生动诠释了华尔街随机无序现象内蕴含的秩序性。钢珠后方的红色条柱代表理论投资组合月度收益的大样本数据，便于将钢珠分布与股市情况进行对比。在股票市场中，随机事件包括有关某家公司或整体资本主义的新闻报道以及反映这些信息的证券价格。钢珠从中央起始点开始的随机流动模拟了系列公允价格变动，最终形成了呈钟形曲线的月度收益正态分布。

在菲利普·波伊桑 (Philip Poissant)、杰瑞·徐 (Jerry Xu)、阿特·福斯特 (Art Forster)、杰克逊·林 (Jackson Lin)、迈克·奥彻特洛尼 (Mike

Auchterlonie)、布伦森家族 (Brunson family) 等人士的协助下，我于 2015 年设计制作了首款 7.5 英寸高的桌面型高尔顿板并将其命名为“随机漫步者” (The Random Walker<sup>®</sup>，美国专利号 D784449)。这款紧凑型高尔顿板不仅是理解统计概念与股市随机性的实用教育工具，同时也是一款可供娱乐的趣味桌面装置。凭借创新的翻



“随机漫步者”  
(The Random Walker<sup>®</sup>)



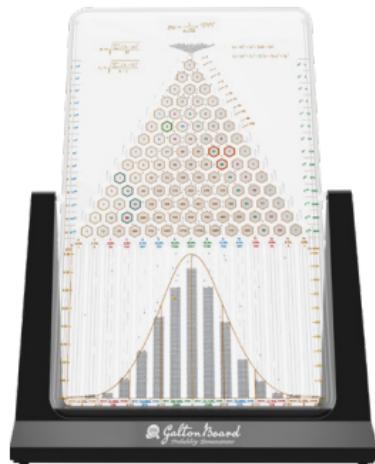
存于 IFA 大厅的八英尺高尔顿板

转复位设计，仅需轻轻一翻，即可轻松体验混沌中的有序规律。目前全球约有 6 万个这种高尔顿板摆放在人们的办公桌面上。

2024 年，我们推出了一款更大尺寸的新版高尔顿板，使其能够更好地向人们演示其中的规律。我们将其尺寸设计为 12 英寸 × 8.5 英寸，并将其命名为“高尔顿板：概率演示器”(Galton Board: Probability Demonstrator, 美国专利号12268971 B1)。该模型版本还新增了两个股市分析附加组件并配备了一份 19 页的详细教育型使用指南。

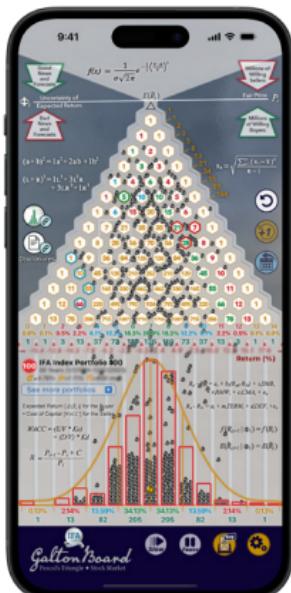
此桌面版高尔顿板在前代基础上融入了多项设计改进。它更精准地呈现了二项分布、帕斯卡三角形及其底层关联概念。通过添加月度收益数据附加组件，使用者能够直观看到股市要素（包括赫伯纳模型）与钢珠钟形曲线之间的匹配关系。

这款新型简易高尔顿板采用了经济实用的紧凑型设计，甚至可以轻松放入衬衫口袋。



高尔顿板：概率演示器

为进一步推广对高尔顿板底层原理和帕斯卡三角形理论的理解,我于 2023 年主导开发并推出了高尔顿板的应用程序版本。该应用程序通过陀螺仪功能,可实现手机或 iPad 设备倾斜时听见声响、观察钢珠流动,模拟了实物钢珠在装置内滚动的效果。点击设置图标时,程序还将叠加显示 20 个指数投资组合收益直方图,用于观察风险水平变化时对应收益区间的标度变化。要获取 iPhone 和 iPad 版应用程序,请访问 Apple App Store 并搜索“Index Fund Advisors”。在应用程序中找到高尔顿板图标,即可访问交互式演示界面。您也可以通过 Mac 笔记本电脑或台式机上访问 Mac App Store,搜索“Galton Board”应用程序。最后,安卓设备用户可访问 Google Play Store 并搜索“Index Fund Advisors”。



高尔顿板:应用程序版本



获取应用程序



# 关于 Index Fund Advisors



**Index Fund Advisors**  
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

## 以专业教育取代投机行为

Index Fund Advisors, Inc. (IFA) 是一家仅收取咨询费的顾问和财富管理公司，致力于以受托管理标准为客户提供风险适配、全球多元化和税务优化的投资策略。

IFA 作为一家注册投资顾问公司，为个人、退休计划、信托、企业、非营利组织以及公共和私营机构提供专业投资建议。IFA 成立于 1999 年，并于 2024 年迎来其 25 周年庆。IFA 向美国全境客户提供投资建议。

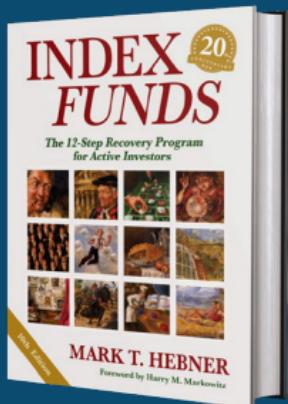
但 IFA 的服务价值不仅限于投资建议。作为综合型金融合作伙伴，IFA 在提供投资建议的同时，还将结合财富管理与财务规划服务，协助客户规划财务发展旅程。 我们的财富顾问采用个性化方式为客户适配投资组合，同时提供全方位的财富管理服务和财务规划，打造周密完善的全周期客户体验。

IFA 会主动规避与选股、择时、基金经理以及选风格策略等操作相关的不必要成本支出。IFA 采用严谨的量化投资方法，在优化多元组合的同时保持成本效益优势。

IFA 以尤金·法玛 (Eugene Fama) 和肯尼斯·弗伦奇 (Kenneth French) 的研究成果为基础构建了核心投资体系,整合数十年的历史风险收益数据、第三代指数基金设计以及 Dimensional Fund Advisors 开发的精细化被动交易技术。

IFA 结合客户具体需求和目标定制投资管理和投资组合策略,同时提供税务规划与会计服务、线上财务规划和业务引荐服务,打造细致周到的个性化客户体验。经验丰富的 IFA 财富顾问通过个性化专业建议,帮助客户实现长期财务目标。

马克·T·赫伯纳 (Mark T. Hebner) 作为 Index Fund Advisors, Inc., (IFA) 的创始人兼首席执行官,曾撰写广受业界认可的著作《指数基金:主动型投资者的 12 步康复计划》(Index Funds: The 12-Step Recovery Program for Active Investors),并长期专注于投资者教育工作。



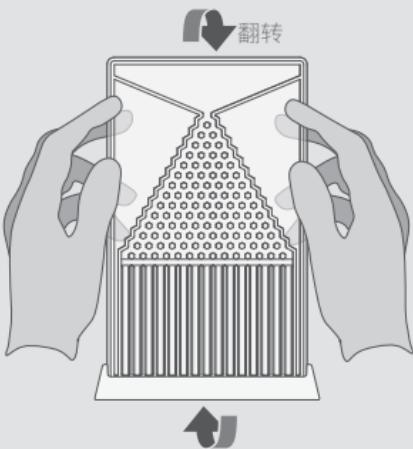
如需详细了解 IFA 如何助力实现您的财务目标,请访问 [ifa.com](http://ifa.com) 官网或致电咨询。



Index Fund Advisors, Inc.  
19200 Von Karman Ave.  
Suite 150  
Irvine, CA 92612  
**888-643-3133**  
ifa.com | info@ifa.com

# 高尔顿板使用说明

1. 将高尔顿板翻转过来，使所有钢珠落入储珠仓。
2. 将装置水平放置于台面，静置等待所有钢珠落入收集槽内。
3. 观察较大的金色示踪珠，查看所有钢珠的整体分布情况。



本操作说明源自 1873 年蒂斯利与斯皮勒 (Tisley & Spiller) 为弗朗西斯·高尔顿 (Francis Galton) 定制的原版高尔顿板。高尔顿板上的说明文字为高尔顿亲笔书写，内容如下：

**本装置  
由弗朗西斯·高尔顿(英国皇家学会院士)研制，  
用以阐释误差律及离散现象原理**

使用时将此装置倒置，使所有钢珠储珠仓内。然后迅速二次倒置装置，并将其竖直置于水平台面上。钢珠随即全部落入漏斗并穿过漏斗口，经钉板结构的复杂路径后最终堆积在底部的垂直收集槽内，直观呈现误差律作用下的分布形态。

■ 有关更多信息、视频、文章、照片、社交媒体内容等，请访问 [ifa.com/galtonboard](http://ifa.com/galtonboard)。

©2025 Index Fund Advisors, Inc • [ifa.com](http://ifa.com) •

19200 Von Karman Ave Suite 150 | Irvine, CA 92612 • USA 888-643-3133 • #IFA-SGB2025

• 中国制造 • 由马克·T·赫伯纳 (Mark T. Hebner) 研制 • 保留所有权利

高尔顿板受一项或多项专利保护，包括美国专利号 12268971 B1 和

美国外观设计专利号 D784449