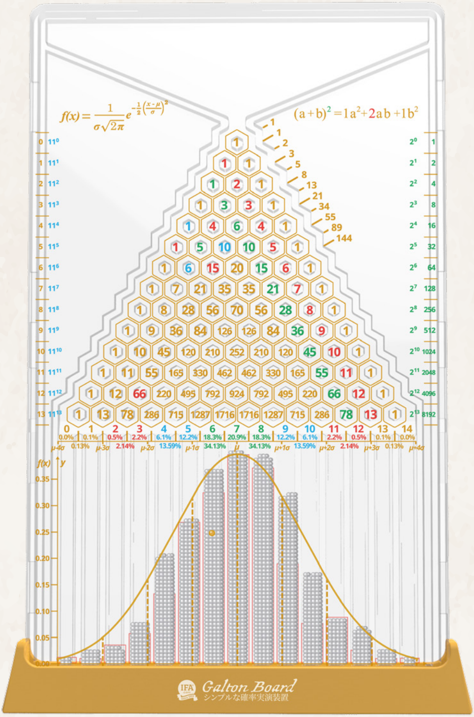
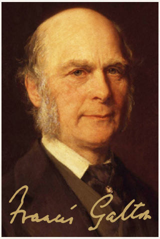
Galton Board
シンプルな確率実演装置



ユーザーガイド

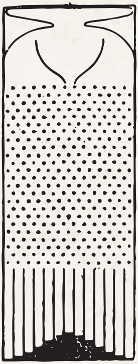
ガルトンボード

パスカルの三角形を用いたガルトンボード（簡易版）は、150 mm × 95 mmの確率実演装置で、動きの中で数学の視覚化、および確率と統計の力を示すものです。ボードの裏側に印刷されているのは、理論的投資ポートフォリオのヒストグラムです。これは市場利益のランダム性と確率を説明しています。



Sir Francis Galton

ガルトンボードは、数世紀の歴史を持つ数学的概念を、革新的かつ動的な卓上型デバイスに表示します。これには、Francis　Galton卿（1822～1911年）が1873年に発明した、二項分布の説明が盛り込まれています。二項分布とは、多くの六角形の列と多くのビーズは正規分布に近似するという、中心極限定理として知られる概念です。Galton卿は、ボード上の釘で跳ねるビーズの見かけ上の混沌から生じるベルカーブの秩序に魅了されました。中心極限定理、もっと具体的に言えばde　Moivre（1667～1754年）やLaplace（1749～1827年）の定理によると、ある条件下において、正規分布は二項分布に近似するものとして使用されることがあります。



ガルトンによるスケッチ

ガルトンボードの上下をひっくり返すと、ビーズは上部の溜め場に流れ込みます。　上下を元に戻して水平な面に置くと、4,280個の鉄製ビーズと1個の大きなゴールデンビーズは、ガルトンボードに左右対称に配置された14列の六角形を通って、溜め場から滝のように流れます。デバイスが水平のときには、ビーズは等しい確率で105個の六角形に当たって跳ね返

り、左右に移動します。ビーズがボードの底部にある15のビンのひとつに落ち、それが積み重なるとベルの形をしたヒストグラムを形成します。ガルトンボードをひっくり返すことは、およそ2秒で59,920枚のコイントスを行うのと似ています。横1列に並んだ14枚のコインの表を表すビーズは14番目のビンに着地し、表が出たコインなし（14枚のコインの裏）を表すビーズは0番目のビンに着地するでしょう。

ボード上部にプリントされているのは、正規分布と二項展開の式です。ボード下部にプリントされているのは、正規分布またはベルカーブと、それらの分布に対する平均および標準偏差ラインです。ガウス分布（Carl Friedrich　Gauss、1777～1855年）としても知られているベルカーブは、統計と確率論において重要なものです。これは、ガルトンボードのビーズや株式市場の月次収益のような、自然科学および社会科学でランダム変数を表す際に使用されます。また、Y軸とX軸の説明、番号の付いたビンと予想されるビーズの割合および数についても確認できます。


Blaise Pascal

六角形の上に重なっているのはパスカルの三角形（Blaise　Pascal、1623～1662年）であり、これは上の2つの数字を足した数字がその下に来るルールに従ってできた、数字の三角形です。それぞれの六角形の数字は、天辺の六角形から移動してくるビーズが通る可能性のある道筋の数を表しています。これはフィボナッチ数（Leonardo Fibonacci、1175～1250年）も示しています。フィボナッチ数とは、パスカルの三角形における特定の対角線の合計です。パスカルの三角形の中には、数学的な性質やパターンが数えきれないほどあります。これには、自然数、行の合計、べき乗（11）、べき乗（2）、フィギュレート数、ダビデの星定理、ホッケースティックのパターンなどがあります。パスカルの三角形にあるその他のパタ

ーンで、このボードでは特定されないものとして、素数、平方数、2進数、カタラン数、二項展開、フラクタル、黄金比、シェルピンスキーの三角形などがあります。

4,280個の鉄製ビーズの中に、1個の大きなゴールデンビーズがあります。これは単一のランダムな結果を示します。各ビンの上部には、ビーズがそのビンに着地する確率の見積りをパーセンテージで示しています。　ゴールデンビーズの行方を追うことで、ガルトンボードをひっくり返すたびにこうした確率性をはっきりと観察することができます。　裏側にある赤い投資ポートフォリオのヒストグラムとあわせて、ゴールデンビーズは翌月の株式市場における収益の範囲および確率の可能性を表すことができます。ゴールデンビーズがどのビンに着地するかというガルトンボードの確率性は、株式市場予測家の予測に代わるものとなります。

このガルトンボードに埋め込まれているのは、確率論、独立同一分布（iid）ランダム変数、正規またはベル型曲線、中心極限定理（ド・モアブル＝ラプラスの定理）、二項分布、ベルヌーイ（1655～1705年）試行、回帰の平均、大数の法則、コイントスや株式市場の収益などの確率性、ランダムウォーク、ギャンブラーの誤謬、誤り率の法則、そしFrancis Galton卿が言及した「無秩序の法則」など、多くの統計的・数学的概念です。

IFA.com Since 1999
Galton Board
シンプルな確率実演装置

Galtonの言葉

著書『Natural Inheritance』(1889年)の中でFrancis Galton卿は、自身が作成した装置について色彩豊かに説明し、見かけ上の混沌の中の秩序を明らかにしました。以下は、136年前に書かれた本の内容をわかりやすく抜粋したものです。使われている文章は、当社のガルトンボードの説明に使用する用語に合わせて、わずかに更新されています。

統計の魅力

「どうして統計学者は一般的に、平均に対する問いかけに自ら制限をかけてしまうのか、もっと包括的な見解を楽しむことができないのか、理解に苦しみます。そうした統計学者の魂は、多様性の魅力に対して、まるでイギリス郊外の平坦な地形のように退屈なのではないでしょうか。スイスを思い出してみてください。もしも山が湖になだれ込んだとしたら、2つの厄介事を同時に取り除くことができるでしょう。平均は1つの事実ではあるものの、他の1つの事実がそこに加わった場合、観察されていたものとほぼ一致する正規スキーム全体が、潜在的に存在し始めるのです。」

「統計学という名称そのものを嫌う人もいますが、私はそれを、美と興味に満ちたものであると感じています。乱暴に扱われることなく、高度なメソッドで繊細に扱われ、注意深く解釈されている限り、複雑な現象を処理する能力は並外れています。人間科学を追究する者の道のりを阻む、困難という険しい茂みを突き進む突破口を切り開くための、単なる道具にすぎないのです。」

頻度の曲線を生み出す原因の機械的な説明

「頻度の曲線と分布の曲線は転換できます。したがって、いずれかの曲線の起源が明らかになれば、もう一方の曲線も理解できるようになるのです。では頻度の曲線の起

源について、ここに示す装置を使って説明しましょう。この装置は、どの偏差による条件かを非常にかわいらしい方法で模倣します。

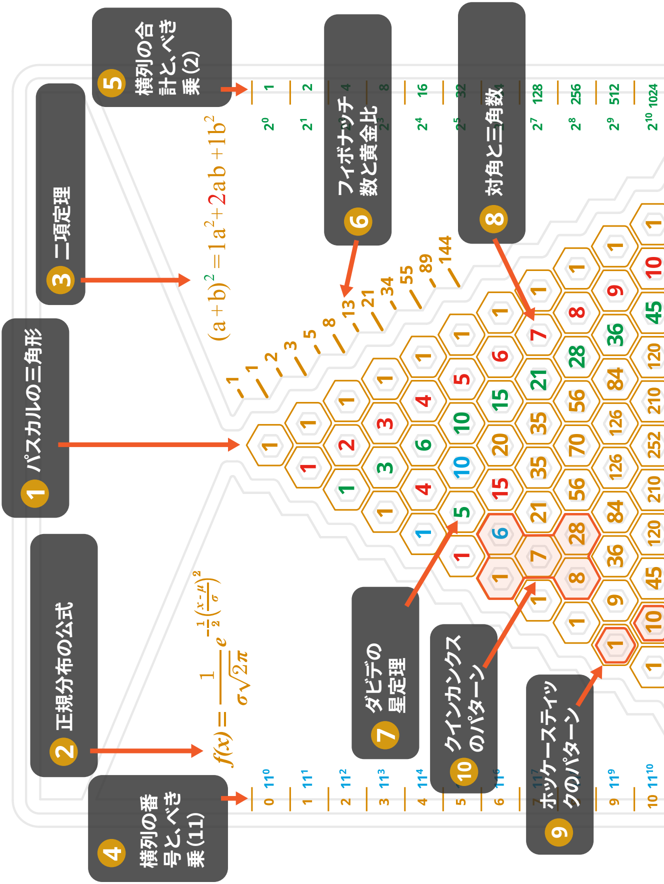
我々のガルトンボードのデザインは、静電気防止加工がされたプラスチックフレームで作られています。ビーズの溜め場はボードの天辺に来るよう設計されています。漏斗の出口の下には六角形が14行並んでいます。これはガルトンの釘に類似するもので、ボードの裏側までまっすぐ刺さっており、その下には15個のビン、または垂直の仕切りが並んでいます。勢いよく移動する4,280個の鉄製ビーズはボードに囲われています。ボードを「上下逆さま」にひっくり返すと、すべてのビーズが上端に向かって走り、溜め場に入ります。その後、ボードを正しい位置に戻すと、望ましいアクションが始まります。溜め場の境界線には、フレームの上部に集められたすべてのビーズを、漏斗の口へと向かわせる効果があります。

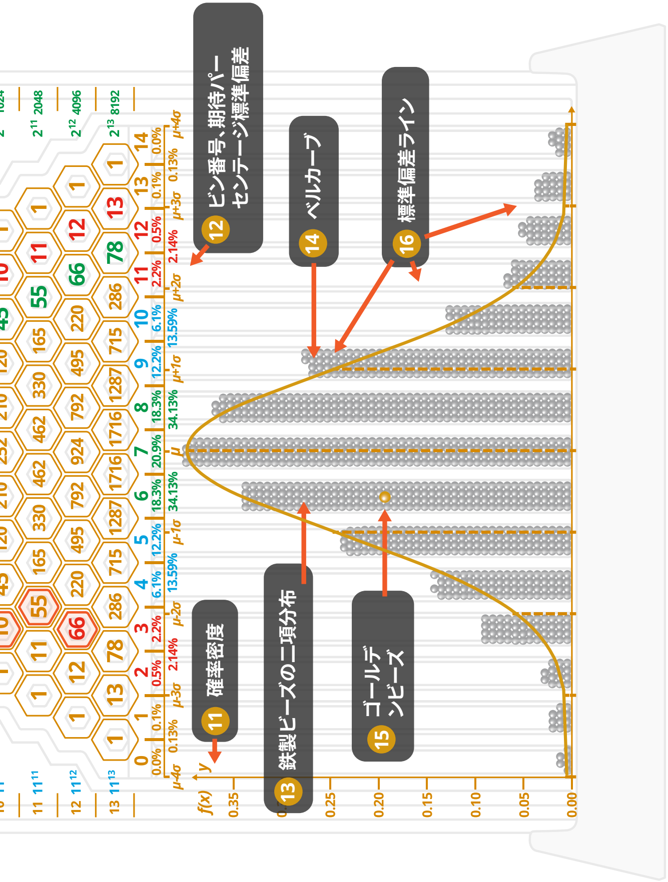
「ビーズは漏斗を通過して、釘（六角形）の間を、興味をそそる様子でくねくねと曲がりながら移動します。それぞれのビーズは、釘とぶつかるたびに右や左へ素早く動きます。釘はクインカンクス形式に配置されているため、下降するビーズはどれも必ず、連続する行の釘にぶつかります。漏斗の口から出てくるビーズの流れは下降するにつれて横に広がり、最終的にはすべてのビーズが、最後の行の釘を離れた直後にビンへと吸い込まれていきます。ビンに蓄積するビーズの分布を示す輪郭は、頻度曲線に近似していて、この実験を何度繰り返そうとも、毎回同じようなかたちになります。

「この装置のアクションが依存する原則は、ひとつひとつのビーズがその経路において遭遇する、小規模かつ独立した数多くのアクシデントです。珍しいケースでは、幸運が長く続き特定のビーズの進路がビンの外側に向かうこともありますが、大多数の事例では、右方向への偏差が生じるアクシデントの数と左方向への偏差が生じるアクシデントの数が、多かれ少なかれ均衡しています。したがって、ビーズの大半は漏斗の出口から垂直に引いた線の周辺に位置するビンへと向かっていき、その線の右または左へと異なる距離で逸れていくビーズの頻度は、その距離が線から離れていくよりもずっと速い比率で減少していきます。」

見かけ上の混沌の中の秩序

「『Law of Frequency of Error』で表現される宇宙的秩序の素晴らしい形状ほど、想像力に影響を与えやすいものを、私はほとんど知りません。ギリシャ人がその法則を知っていたとしたら、きっと擬人化され、神格化されていたことでしょう。それは穏やかに君臨し、大きな混乱の中で自ら完全に消え去ります。群衆が巨大であるほど、見かけ上の無政府状態が激しいほど、その支配はより完璧になります。理性を超越した最高の法則なのです。大きなサンプル数の混沌の要素を手にとり、その巨大な秩序に整列させたときはいつでも、疑いようもなく最も美しい形の規則性がずっと隠れていたことがわかるのです。整列したビンの上部は一定の割合で流れるような曲線を描き、それぞれの要素が定められた位置に整えられ、予め決まったビンに正確に収まるようになっています。ビンにある2つの指定されたグレードでの長さが既知である場合、その他すべてのグレードに見られる長さは、両端に向かうものを除き、すでに説明した方法で、かなり正確に予測可能です。


1 パスカルの三角形
2 正規分布の公式
3 二項定理
4 横列の番号とべき乗(11)
5 横列の合計とべき乗(2)
6 フィボナッチ数と黄金比
7 ダビデの星定理
8 対角と三角数
9 ホッケースティックのパターン
10 クインカンクスのパターン
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144
2^0 1
2^1 2
2^3 8
2^4 16
2^5 32
2^7 128
2^8 256
2^9 512
2^{10} 1024
0 11^0
1 11^1
2 11^2
3 11^3
4 11^4
9 11^9
10 11^{10}


11 確率密度
12 ピン番号、期待パーセンテージ標準偏差
13 鉄製ビーズの二項分布
14 ベルカーブ
15 ゴールデンビーズ
16 標準偏差ライン

ガルトンボードの特徴

1 パスカルの三角形

パスカルの三角形とは、上にある2つの数字を足した数がその下に来るというルールに従う、数字の三角形のことです。このパターンは無限に継続可能です。Blaise Pascalは、自身の数学論文『Traité du triangle arithmétique』(1665年)の中で説明しているように、この三角形を用いて確率論の研究を行いました。ペルシャ、インド、中国、ドイツ、イタリアの数学者たちは、Pascalの数世紀前に確率論の研究を行っていました。三角形のパターンは、二項係数の数学的性質に変換します。ガルトンボードに配置される場合、六角形のそれぞれの数字は、その六角形に到達するためにビーズが通過する可能性のある道筋の数を表しています。

2 正規分布の公式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

確率論において、正規分布は実数値のランダム変数に対する連続確率分布の一種です。ここで示すのは、確率密度関数**f(x)**の標準的な形式です。正規分布は統計学において重要なものであり、自然科学や社会科学では分布が不明な実数値のランダム変数を表すのによく使われます。公式に含まれているのは円周率(π)の定数(**π ≈ 3.142**)であり、これは円の直径に対する円周の比率です。さらに、オイラー数(**e ≈ 2.718**)も含まれます。これは自然対数の底になるものです。中心極限定理では、ランダム変数**X**は、サンプルサイズが大きくなりシグマ(**σ**)が有限であるため、正規分布になると述べています。

3 二項定理

二項定理は、二項式のべき乗の展開を説明するものです。パスカルの三角形は、二項展開で現れる係数を定義します。それはつまり、パスカルの三角形のn^{th}番目 の行が多項式$(a + b)^n$の展開式の係数を構成するということです。ガルトンボードの二項式は左と右$(L + R)^n$です。

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(L+R)^3 = 1L^3 + 3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

$(a + b)^n$の展開は$(a + b)^n = x_0a^n + x_1a^{n-1}b + x_2a^{n-2}b^2 + \dots + x_{n-1}ab^{n-1} + x_nb^n$であり、その場合の形式の係数である$x_k$はまさに、パスカルの三角形の$n^{th}$番目の行の$k^{th}$番目の成分に現れる数字（0から数え始めて$k$および$n$）です。 これは次のような式で表すことができます。$x_k = \binom{n}{k}$、つまり「nはkを選択します」。ガルトンボードの1番目の六角形は$\binom{0}{0}$で、$\binom{1}{0}$と$\binom{1}{1}$がその下に続きます。

二項式の例はボード上で、$n = 2$に対して$(a + b)^n$および$n = 3$に対して$(L + R)^n$と示されます。

4 行番号とべき乗（11）

左側にはパスカルの三角形の14行に数字が振られていて、1行目はn=0として、各行の1番目の成分はk=0として定められています。14行は十分に大きいため、その結果である二項分布は連続正規分布のよい離散的な近似となります。

各要素を桁として取ることで（さらに要素が1桁以上なら左側に繰り越して）各行を単数に分解した場合、べき乗（11^n）が得られます。 1、11、121、1331、14641…はその行のパスカルの三角形にある数字と一致します。

5 行の合計とべき乗(2)

行の数の合計は、nが行番号と等しい場合、2^nに等しくなります。たとえば、3の行でパスカルの番号の合計は、1 + 3 + 3 + 1 = 8となり、2^3に等しくなります。

各行の数字の合計は、べき乗(2)の次にも示され、それぞれの合計は後続の行で2倍になります。さらに、行の成分の二乗の合計は、行番号の真ん中の成分を二乗した数字と等しくなります。たとえば、4の行の成分を二乗した合計($1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$)が70に等しくなる場合、8の行の真ん中の成分も70になります。

6 フィボナッチ数と黄金比

パスカルの三角形で示される対角線上の数字の合計は、フィボナッチ数と一致します。列は次の順序で推移します。1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、などと続きます。この列に含まれる数字はそれぞれ、その前にある2つの数字の合計です(例: 2+3=5、3+5=8、5+8=13、8+13=21…)。Leonardo Fibonacciは著書Liber Abaci』(1202年)の中で、これらの数字を世に広めました。フィボナッチ数を進んでいくと、連続するフィボナッチ数の比率が1.61803398…の黄金比(ϕ)に近づいていきますが、決して等しくはなりません(例: 55/34=1.618、89/55=1.618、144/89=1.618)。黄金比は、Euclidが紀元前300年に書いた著書『Elements』の中で初めて定義されました。Leonardo Da Vinciはこの比率を用いて傑作を生み出しました。黄金比の方程式は次のようになります。

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 ダビデの星定理

ダビデの星定理は、ある数字を囲む3つの数字の2組の積は等しくなるというものです。ここで示す例では、数字の5は列の中で1、4、10、15、6、1の数に囲まれていて、交互の数字を取ると、1×10×6 = 4×15×1 = 60となります。

8 クインカンクスのパターン

ボード上の六角形はクインカンクスのパターンで並んでいます。これは5つのオブジェクトのうち4つを正方形または長方形の角に、5つ目を中央に（サイコロの5の目のように）配置するパターンです。

9 対角線と三角数

対角線は単体のフィギュレート数を含み、その左右の辺には1のみが含まれます。その後の対角線は自然数、三角数（正三角形に配置された点の数）、四面体数（三角錐数）、五胞体数、5、6、7の単体数と続きます。 それぞれの自然数の二乗は、3番目の対角線上にある一対の隣接する要素の合計と等しくなります（三角数）。例：$7^2 = 49 = 21 + 28$

10 ホッケースティックのパターン

1の辺から始まる対角線の数字の合計は、隣の対角線の下の数字と等しくなります。ここで1 + 10 + 55 = 66となるように、これらの数字の輪郭からホッケースティックのパターンが現れます。

11 確率密度

確率密度$f(x)$とは観測値とその確率との関係を指します。これは、連続ランダム変数の特定の範囲内で発生するランダム変数の発生確率を定義します。確率密度の重要な関数はガウス関数、または正規、ランダム変数の関数で、ベルの形をした曲線に似ています。これらの$f(x)$値は1のシグマ（σ）を持つ正規分布と仮定します。

12 ビン番号、期待パーセンテージと 標準偏差

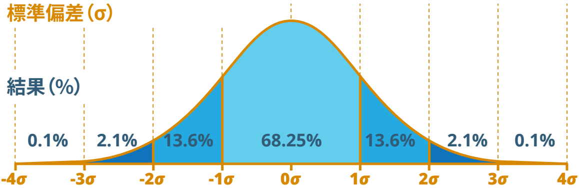
15のビンには0から14までの番号が振られているため、ゴールデンビーズの位置を容易に特定および記録できるようになっています。また、あるビン内で発生するランダムな結果のパスカルの三角形からの確率は、三角形の15番目の行（n=14）を想像することで特定できます。

ビンごとに予想される結果のパーセンテージはビン番号のすぐ下に示されています。真ん中のビン（7番）では20.9パーセントと予想されます。

ビンの情報軸の下にあるのが、標準偏差軸です。曲線の各標準偏差ラインの上部にラベル付けされているのは、平均値最大4の標準偏差（μ ±　4σ）からの標準偏差と一致する数字です。矢印があり、±4番目の標準偏差が拡張され最後のビンを通り過ぎることを指定します。ベルカーブの中心にある線が平均です（平均値μ）。各標準偏差ラインの間は、ベルカーブのそのエリアに対して予想される結果のパーセンテージです。

13 ベルカーブ

「ベルカーブ」と呼ばれることも多い正規分布は最も広く知られていて、すべての確率分布に使用されます。正規分布は多くの自然現象に近似することから、数多くの確率問題で参照される標準へと発展してきました。成人の身長、乳児の体重、学級テストの点数、株価指数の月次収益の大規模なサンプル、そしてガルトンボードのビーズなど、複数のデータセットが正規分布に従います。　以下の図は、標準偏差によって分割されたベルカーブを示しています。



この物理的なガルトンボードの小さな六角形と通路の制約が、幅の広いベルカーブという結果を生んでいます。ボードに「最もフィットする」曲線を印刷してありますが、それは上記で示すものとはわずかに異なります。

14 鉄製ビーズの二項分布

溜め場から落ちて六角形の固定されたパターンを通過する鉄製ビーズは、それぞれ**独立同一分布（iid）**ランダム変数を表しています。二項分布は、それぞれのビーズに対し、六角形に当たるごとに1回の試行とする14回のベルヌーイ試行に基づく、数千個の鉄製ビーズによって作られます。ビーズの離散二項分布は連続正規分布にかなり近似します。

15 ゴールデンビーズ

0.8 mmの鉄製ビーズ4,280個の中に、2.0 mmのゴールデンビーズが1つ入っています。このビーズが単体のランダムな結果を実証します。

16 標準偏差ライン

標準偏差（σ）は、すべてのデータポイントがどれだけ平均値（μ）のまわりに密集するかを測定したものです。正規分布の形状は、平均値と標準偏差によって決まります。正規分布のデータの約68パーセントは、平均値の1つの標準偏差内に収まります。約95パーセントは2つの標準偏差内に、約99.7パーセントは3つの標準偏差内に、さらに約99.99パーセントが4つの標準偏差内に収まります。パスカルの三角形にある六角形の14の行とともに、三角形の底の行には14個の六角形があります。15のビンには、それぞれの端とそれぞれの六角形の間にあるものもあります。これら15のビンは、2x15/14 = 8.0の合計分布標準偏差（$\mu \pm 4\sigma$）を表しています。各ビンは0.533の標準偏差に等しく、各標準偏差は1.875のビン（8/15 = 0.533または15/8 = 1.875）に等しくなります。

標準偏差（サンプル）

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

標準偏差（母集団）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}}$$

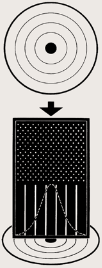
ガルトンボードについてのEAMESの見解

Eamesのガルトンボードに関するインフォグラフィック

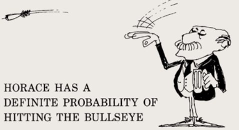
私たちのガルトンボードは、CharlesとRayのEames夫妻が1961年のマスマティカ展（A World of Numbers ... and Beyond）で展示した、高さ約3.4メートルの革新的な「ガルトンの確率ボード」を連想させる卓上型デザインです。さらに大きな、高さが約4.4メートルあるEamesの確率ボードは、1964年に開催されたニューヨーク世界博覧会のIBMのパビリオンに展示されました。右側に描かれているのは、1961年のマスマティカ展の案内標識のミニバージョンです。

GALTON'S

PROBABILITY BOARD



THIS MACHINE DEMONSTRATES HOW A PROBABILITY CURVE CAN BE FOUND BY EXPERIMENT



HORACE HAS A DEFINITE PROBABILITY OF HITTING THE BULLSEYE

HE CAN GET AN IDEA OF THIS PROBABILITY BY COUNTING THE NUMBER OF DARTS THAT HIT THE BULLSEYE, AND COMPARING IT WITH THE TOTAL NUMBER HE THROWS.

THE MORE DARTS HE THROWS, THE BETTER HIS CHANCES OF GETTING A GOOD ESTIMATE.

IN EFFECT, THE GALTON BOARD THROWS A BALL AT THE CENTER BOX.

THE PINS INTRODUCE ERRORS (AS HORACE DOES) THAT MAKE MOST OF THE BALLS MISS THE BULLSEYE.

WE CAN ESTIMATE THE PROBABILITY OF HITTING A GIVEN BOX BY COUNTING THE NUMBER OF BALLS THAT LAND IN THE BOX.

NOTICE HOW CLOSELY THE CURVE FORMED BY THE BALLS MATCHES THE CURVE PAINTED ON THE GLASS

A ball can land in any box, and yet any given box fills to nearly the same height each time the experiment is repeated.

THIS STABILITY IS DUE TO THE FACT THAT THERE ARE MANY BALLS.

Unpredictable | **More Predictable**

IF A RANDOM EVENT HAPPENS A GREAT MANY TIMES THE AVERAGE RESULTS ARE LIKELY TO BE PREDICTABLE.*

*The first mathematical theorem of this kind was proved by Jacob Bernoulli.

"With the probability approaching certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event in a series of independent trials with constant probability will differ from that probability by less than any given positive number, provided the number of trials is sufficiently large."

Jacob Bernoulli (1654-1705)

"RELATIVE FREQUENCY" is the number of times an event* occurs divided by the number of trials.**

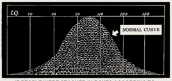
In the Probability Board the release of a ball is a ** TRIAL.

Landing (or not landing) in a given box is an * EVENT.

The curve painted on the glass was calculated by a formula.

THIS CURVE IS A PARTICULAR THEORETICAL CURVE CALLED THE "NORMAL CURVE", WHICH DESCRIBES THE BEHAVIOR OF SUCH THINGS AS–

I.Q. TESTS



IF PEOPLE WERE STACKED IN BOXES ACCORDING TO THEIR I.Q. SCORES, THEY WOULD FORM THE "NORMAL CURVE."

THE MEASUREMENTS OF BEAUTY CONTEST WINNERS

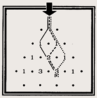
RUN AT ROULETTE

ERRORS IN MEASUREMENT

WHEN THE BALLS ARE DROPPED, THEY ARE ALL AIMED AT THE CENTER BOX. THE SUM OF ALL THE ERRORS CAUSED BY HITTING THE PINS DETERMINES THE BALLS' FINAL POSITION.

The average of many independent errors almost always leads to the Normal Curve, no matter what the underlying process may be.

THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IS A PRECISE STATEMENT OF CONDITIONS WHICH LEAD TO THE NORMAL CURVE.



LaPLACE (1749-1827) DeMOIVRE (1667-1754)

PASCAL'S TRIANGLE

The number of possible paths to a given space in the array of pins is given by Pascal's Triangle. For the number of paths to a space is the sum of the number to the two spaces above it. The probability of a ball's dropping in any box can be found by counting the number of paths to that box, and comparing it with the total number of paths.

As the number of trials gets large, the distribution of the balls is likely to be near normal. This idea, first stated in Abraham de Moivre's "Doctrine of Chances," was later proved by the Marquis de Laplace, and called the Laplace-de Moivre limit theorem. Hard work during the next hundred years eventually produced a much more general statement of the same sort, the "central limit theorem," universally conceded to be one of the most important results of probability theory.

PROBABILITY IS ADDITIVE

IF THE PROBABILITY OF "5" IS $\frac{1}{6}$ AND THE PROBABILITY OF "4" IS $\frac{1}{6}$

THEN THE PROBABILITY OF "5" OR "4" IS 1/6 + 1/6. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$

PROBABILITY, LIKE AREA, IS ADDITIVE. HENCE, IT IS OFTEN POSSIBLE TO REPRESENT PROBABILITY AS THE AREA UNDER A CURVE.

For example, in the Galton Board, the probability of getting in -

this box | or in either of these 2 boxes | or in any of these 3 boxes

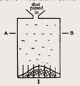
is represented by the corresponding area.

The branch of mathematics concerned with determination of lengths and areas is called "MEASURE THEORY." Probability is a branch of the Theory of Measure.

THE QUINQUNX

The pins in the Galton Board are often arranged in a figure found in nature - the four corners of a square with a pin in the center, called a Quincunx.

GALTON'S PROBABILITY BOARD -1877



GALTONIA (Hyacinthus candicanus)

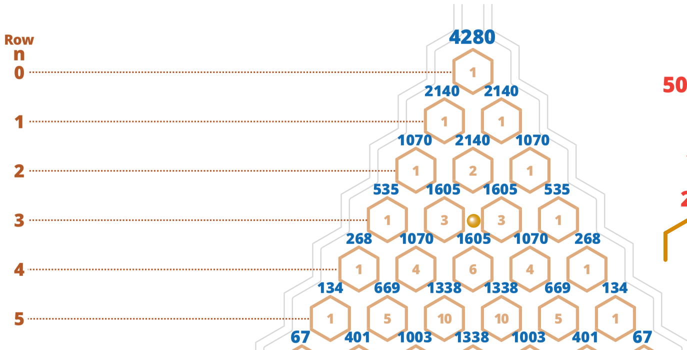
SIR FRANCIS GALTON (1822-1911)

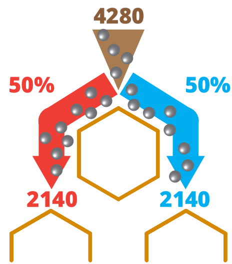
Galton was a cousin of Charles Darwin. In addition to mathematics, he studied and wrote about Botany, Heredity, Geography, Psychology, Statistical Methods, and Mountain Climbing.

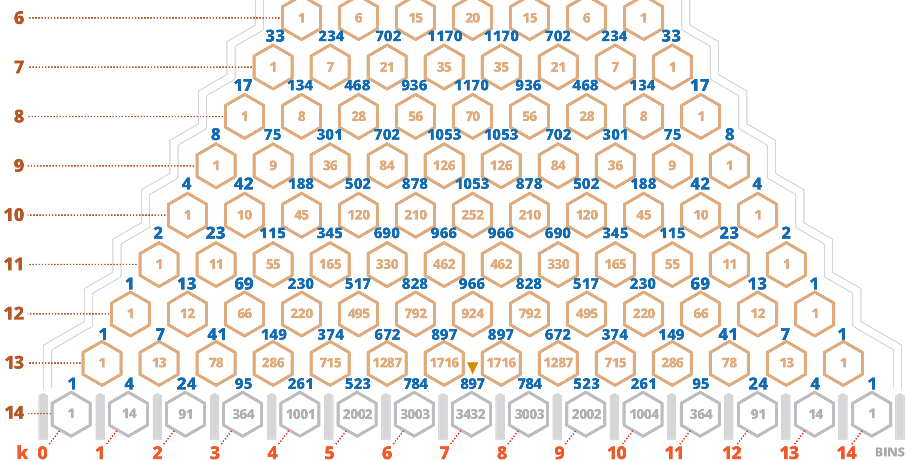
IBM

ビーズの対称二項分布

水平なガルトンボードでは、各六角形の上部でビーズが左右いずれかに進むチャンスは等しくなります。これは、ベルヌーイ試行の一例です。このイラストでは、各六角形の間を進むビーズの予想される数を示しています。ビーズの溜め場には、およそ4,280個のビーズがあります。1番目の六角形（行0とみなされる）では、2,140個のビーズが左へ、2,140個のビーズが右へ進むと予想されます。このように毎回ビーズの数を分割していけば、14番目の行（行13）の後の各ビンに着地すると予想されるビーズの数がわかります。　パスカルの三角形にあるすべての六角形の数字は、行**n**の**k**[th]番目の位置に到達する道筋の数と解釈できます。たとえば、行4の場合、六角形の数字は**1, 4, 6, 4, 1**です。これらの数字を足すと、行4にある5つの六角形すべてに到達する道筋の合計は16になります。これは、2に行番号をべき乗した数字（$2^4 = 16$）でもあります。





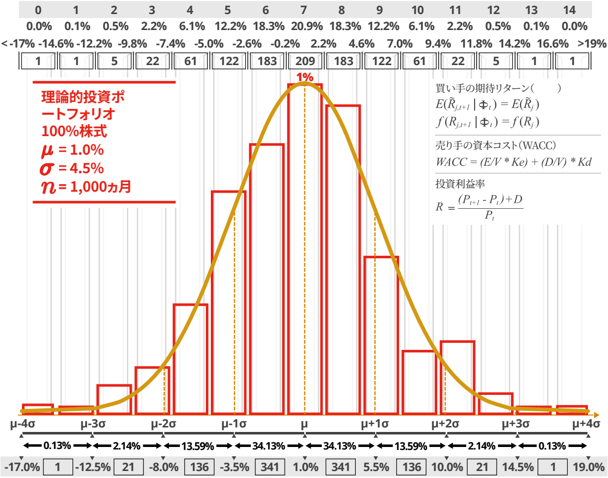


パスカルの三角形の行14（グレー部分）は、ガルトンボードの底にある15のビンのそれぞれに収まるビーズの確率（対称二項分布）を決めるのに使用することができます。n=4を上回る数字の計算に従い、行14の中央のビン（k = 7）に入ると予想されるパーセンテージは3,432/16,384 = 20.95%となります。 つまり、4,280個のビーズを使用すると、897個のビーズがそのビンに収まることが予想されるという意味です。ビーズが16,384個あるとしたら、行14の各六角形の数は、それぞれのビンに着地すると予想されるビーズと等しくなります。

株式市場への応用

投資ポートフォリオの説明

市場リターンの表現手段として、理論的投資ポートフォリオを選択しました。ボードの背景に印刷されている赤い棒は、理論的投資ポートフォリオの1,000ヵ月間の月次リターンの分布を示すヒストグラムです。赤い棒は、100%株式ポートフォリオ（攻撃型）を表しています。これは、月次リターン平均1.0%、標準偏差4.5%、サンプルサイズ1,000ヵ月を想定しています。4σでは、リターンの範囲は約-17%から19%となります（1-(4x4.5)= -17、1+(4x4.5) = 19）。 つまり、ビン15個の場合、ビン1個あたりのリターン範囲は2.4%となります。平均は、中央の1.0%です。



期待パーセンテージおよびリターンを伴うビンの仕切り

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.0%	0.1%	0.5%	2.2%	6.1%	12.2%	18.3%	20.9%	18.3%	12.2%	6.1%	2.2%	0.5%	0.1%	0.0%
1	1	5	22	61	122	183	209	183	122	61	22	5	1	1

<-17% -14.6% -12.2% -9.8% -7.4% -5.0% -2.6% -0.2% 2.2% 4.6% 7.0% 9.4% 11.8% 14.2% 16.6% >19%

市場リターンのヒストグラム上部には、考慮すべき目盛りが4つあります。1つ目は、15個のビンに与えられた、0から14までの単なる番号です。2つ目の目盛りは、各ビンに着地すると期待されるランダム変数のパーセンテージ（この場合では月次リターン）です。3つ目の目盛りは、各ビンの月次リターン範囲の期待パーセンテージの推定です。ビンの仕切りは、ボードの境界がリターンの4σに対応するようにスケーリングされています（≈99.99パーセントの結果または$\mu \pm 4\sigma$）。底部の目盛りは、サンプルサイズを1,000ヵ月とした場合の各ビンの期待月数です。

下軸

μ-4σ		μ-3σ		μ-2σ		μ-1σ		μ		μ+1σ		μ+2σ		μ+3σ		μ+4σ
	0.13%		2.14%		13.59%		34.13%		34.13%		13.59%		2.14%		0.13%	
-17.0%	1	-12.5%	21	-8.0%	136	-3.5%	341	1.0%	341	5.5%	136	10.0%	21	14.5%	1	19.0%

下軸には3つの目盛りがあります。1つ目は、標準偏差のラインを示しています。2つ目は、各標準偏差ライン間で期待される結果のパーセンテージを指定しています。3行目は、サンプルサイズを1,000ヵ月とした場合に各標準偏差ライン間で期待される月次リターンの数を推定しています。

ランダムウォークモデル

効率的市場仮説では、証券（j）の現在の価格（$p_{j,t}$）は、利用可能な情報（Φ_t）を完全に反映しているとされています。これは、「…連続的な価格変動（より一般化すると、連続的な単期リターン）は独立している」ことを意味します。また、連続的変動すなわちリターンは同一分布すると想定されています。ランダムウォークモデルは、これら2つの仮説を合わせて構成されています。このモデルでは、次のことが正式に記述されています。

$$f(R_{j,t+1} \mid \Phi_t) = f(R_j),$$

これは、独立したランダム変数の条件付き確率分布および周辺確率分布は同一であるという一般的な見解を表しています。さらに、密度関数（f）はどの時点（t）においても等しくなければなりません。　証券の期待リターンが長期間一定であることを前提とした場合、次のようになります。

$$E(\tilde{R}_{j,t+1} \mid \Phi_t) = E(\tilde{R}_j).$$

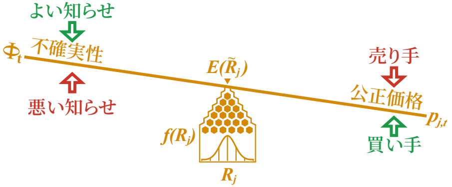
出典: Eugene F. Fama & Merton H. Miller、『』(1972年)、pg.339

ヘブナーモデル

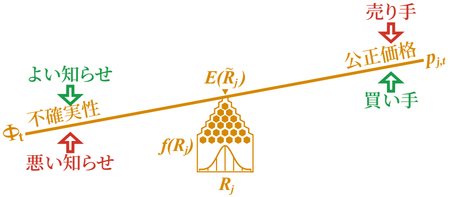
下に示したシーソーの図は、Eugene　Famaの効率的市場仮説の図解です。証券（j）の価格には利用可能なすべての情報が完全に反映されており、その結果、価格が適正になることを表しています。シーソーの左側は、その時点（t）での価格に完全に反映されていると想定される諸情報（Φ_t）を表しています。右側は、その時点での諸情報を考慮して非常に多数の売り手と買い手が適正と結論付けた価格（pj,t）を表しています。 効率的市場仮説では、合理的な透明性を持った整然とした市場においては市場価格（p_t）は概して公正な値と等しくなるかそれに近くなると主張されています。というのも、証券関連の金銭授受における相対的希少性、有用性、潜在的リターンに関する新しい情報（Φ_t）が出ると、投資家が迅速に反応してそれを取り入れるためです。

Mark　Hebnerは、2008年の世界金融危機の際に、このモデルの3つの構成要素を思い付きました。まず、パスカルの三角形の頂点に位置するシーソーです。次に、列を成す六角形に跳ね返されながら列を通り抜けていくビーズです。これは、株式市場の月次リターン（$R_{j,t+1}$）のランダム性を表します。3番目に、実現リターン（R_j）を表すビンに、ビーズが着地します。サンプルが大きければ、これはベルカーブに近似した形状となります（$f(R_j)$）。

よい知らせおよび予測ならびに悪い知らせおよび予測の流れは、ランダムかつ継続的です。これは、任意の時点において、リスクレベルが一定に保たれている投資の期待リターン（$\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{j}})$）の不確実性を表します。悪い知らせにより不確実性が増した場合、期待リターンが基本的に一定になるよう、価格はそれに応じて下がらなければなりません。



よい知らせにより不確実性が減った場合、期待リターンが基本的に一定になるよう、価格はそれに応じて上がらなければなりません。



このモデルはヘブナーモデルと呼ばれており、ガルトンボードおよびパスカルの三角形を市場の仕組みに取り入れるためのフレームワークとして考える必要があります。

資本コスト

経済学と会計学では、資本コストとは、企業のファンド（負債とエクイティーの両方）のコストのことです。また、投資家の観点から言うと、企業の既存の証券に関する必要リターン率を意味します。これは企業の新規プロジェクトの評価にも使用されます。これは、企業への資本提供に対して投資家が期待する最小限のリターンです。したがって、新しいプロジェクトが満たすべきベンチマークが、これによって設定されます。

$$\mathbf{WACC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)}$$

Eは、企業のエクイティーの市場価値です。
Vは、エクイティーと負債の市場価値の合計です（つまり、**E+D**）。
Keは、エクイティーコストです。
Dは、企業の負債の市場価値です。
Kdは、負債コストです。
WACCは、加重平均資本コストです。
念のために申し上げますと、買い手の期待リターンは、売り手にとっての資本コストでもあります（$\mathbf{E(\tilde{R}_{j,t}) = WACC}$）。

投資利益率の公式

投資の実現損益（**R**）を公式として表すには、価格変動（$\mathbf{P_{t+1} - P_t}$）と当該期間中に投資家に支払われる配当または現金（**D**）を足して、その和を投資の元値（$\mathbf{P_t}$）で割ります。

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

Fama/Frenchファクターモデル
エクイティー向けのFama/French 5ファクターモデル

エクイティー向けのFama/French　5ファクターモデルは、平均的な株式リターンにおける市場、サイズ、価値、収益性、投資のパターンを捕捉することを目的とした資産価格付けモデルです。ノーベル賞受賞者であるEugene　Famaと、共同執筆者のKenneth　Frenchによって、2014

年に開発されました。このモデルは、エクイティーの5つの要因の分散ポートフォリオについて、期待リターンにおける71パーセントから94パーセントというクロスセクションのばらつきを説明します。これは、CAPM（1964年）とFama/French　3ファクターモデル（1993年）を土台にして拡張したものです。Fama/French　5ファクターモデルの方程式は、長期間にわたるさまざまな企業特性の株価履歴など、FamaとFrenchが作成した一連の研究インデックスに対する時系列回帰分析です。各要因の係数（独立変数）は、ポートフォリオにおけるその要因へのエクスポージャーまたは偏向を示します。市場（$\mathbf{b_i}$）、サイズ（$\mathbf{s_i}$）、価値（$\mathbf{h_i}$）、収益性（$\mathbf{r_i}$）、投資（$\mathbf{c_i}$）の5つの要因へのエクスポージャーが、期待リターンのあらゆるバリエーションを捕捉している場合、次の方程式におけるアルファ切片（$\mathbf{a_i}$）は、あらゆる証券およびポートフォリオ（$\mathbf{i}$）についてゼロになります。

$$\mathbf{R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt}\text{-}R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it}}$$

$\mathbf{R_{it}}$は、期間tにおけるポートフォリオ$\mathbf{i}$に対するリターンです（従属変数）。
$\mathbf{R_{Ft}}$は、リスクを伴わないリターンです。
$\mathbf{R_{Mt}\text{-}R_{Ft}}$は、時価総額加重型株式市場と現金との間のリターンの値幅です。
$\mathbf{SMB_t}$は、小型株の分散ポートフォリオに対するリターンから大型株の分散ポートフォリオに対するリターンを引いたものです（すなわち、サイズ効果）。
$\mathbf{HML_t}$は、高位と低位のBtM株の分散ポートフォリオに対するリターンの差です（すなわち、バリュー効果）。
$\mathbf{RMW_t}$は、収益性が手堅い株と収益性が弱い株の分散ポートフォリオに対するリターンの差です。
$\mathbf{CMA_t}$は、投資が多い企業と投資が少ない企業（Fama/Frenchでは攻撃型と保守型と呼ばれます）の株の分散ポートフォリオに対するリターンの差です。
$\mathbf{e_{it}}$は、誤差項であり、ゼロ平均残差です。

出典: Fama, Eugene F. and French, Kenneth R、『』（2014年9月）。

ガルトンボードに魅せられた私

Mark T. Hebner

Index Fund Advisors, Inc.（IFA.com）の創業者でCEOのMark　T.　Hebnerです。当社は、資産管理と税務書類作成の業務を行っています。 私は、いくつかの近代的ガルトンボードの制作者でもあります。

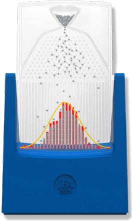
投資のリスクとリターンを説明する方法としては、過去のリターンの大規模サンプル（たとえば1,000ヵ月分のインデックスデータなど）から、平均的なリターンとリターンの標準偏差を推定するのが、最も一般的です。平均と標準偏差さえあれば、Excelでベルカーブを描くことができます。それらが、ベルカーブを定義するのです。Harry　Markowitzは平均リターン対標準偏差の散布図でノーベル賞を受賞しましたが、今となってみれば、それはベルカーブになぞらえたものにすぎませんでした。そういうわけで、ベルカーブを生成する物理的装置を知ったとき、私はとても興奮しました。市場の仕組みおよびさまざまな結果の範囲の確率を、これによって効果的に実演できると思いました。また、ガルトンボードで月次投資リターンをシミュレートすれば、持続的な期待リターン、30日間のリターンのランダム性、そして非常に長期間にわたる実現リターンのベルカーブを人々に示せるとも思い付きました。簡潔に言うと、この装置は、重要な投資アイデアを投資家が理解するための助けになります。

私がガルトンボードに興味をかきたてられたのは、2005年にEames Officeの映画を見たためです。その映画は、1964年の世界博覧会に関するものでした。Charles Eamesは、IBMの展示のために、高さが約4.4メートルある屋外のガルトンボードを制作しました。これは、Eamesが過去に設計したMathematica: A World of Numbers... and Beyondをモデルにしたものでした。Mathematicaは、Eames Office制作、IBM出資による、初の本格没入型の大規模展示でした。ロサンゼルスのカリフォルニア科学産業博物館で1961年に科学コーナーが新設された際、そのオープニングのために設計されたものでした。

これは、私の初めてのガルトンボードの写真です。オレゴン科学産業博物館によって設計および制作されました。高さ約2.4メートル、幅約1.2メートルの、博物館品質の確率実演装置です。私は、ランダムな一連の事象から生まれる結果の範囲、確率、形状について投資家に教えるために、2009年にこれを依頼しました。このガルトンボードは、Index Fund Advisorsのロビーに設置され、ウォール街のランダムウォークという混沌のさなかでの秩序の表現に一役買っています。ビーズの背後の赤い棒は、理論的投資ポートフォリオから得られる月次リターンの大規模サンプルを表しており、ビーズは株式市場になぞらえることができます。株式市場におけるランダムな事象とは、企業または資本主義一般に関するニュースストーリーおよびこの情報を反映した証券の価格です。中央点からスタートするビーズのランダムな流れは、一連の公正価格をシミュレートし、最終的に、月次リターンの正規分布がベルカーブの形状をとって形成されます。

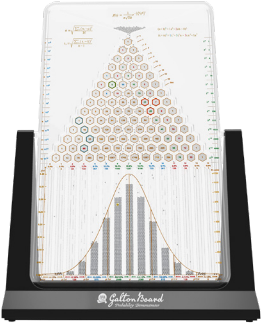
約2.4メートルのガルトンボード（IFAのロビーに設置）

2015年、Philip Poissant、Jerry Xu、Art Forster、Jackson Lin、Mike Auchterlonie、Brunsonファミリーなどから協力を得て、私自身としては初めて、高さ約19センチの卓上サイズのガルトンボードを制作しました。これをThe Random Walker®と名付けました（米国特許番号D784,449）。このコンパクト型ガルトンボードは、統計的概念および株式市場のランダム性を理解する上で役立つ教育ツールであるだけでなく、楽しく遊べる卓上装置でもあります。 革新的なフリップ&リセット設計により、混沌の中の秩序を、指先だけで簡単に体験できます。 世界で約60,000台のこのボードが、卓上を飾っています。


The Random Walker®

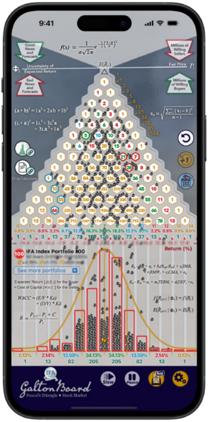
2024年には、よりサイズが大きく、他者へのデモンストレーションがしやすい、新バージョンのガルトンボードを制作しました。約30センチx約22センチで、名前はGalton Board: Probability Demonstratorです（米国特許番号12,268,971　B1）。このモデルでは、株式市場のクリップオン式アクセサリー2つと、ためになる詳細な19ページのユーザーガイドも追加しました。

このバージョンの卓上サイズボードには、旧バージョンからの新たなデザイン改良を数多く取り入れています。二項分布とパスカルの三角形の概念をさらに精密にとらえているほか、多くの数学的概念が組み込まれています。月次リターンデータのクリップオン式アクセサリーを追加すると、株式市場の要素（ヘブナーモデルなど）の取り込みや、ビーズのベルカーブとの近似具合がわかります。


ガルトンボード: Probability Demonstrator

今回の新たなSimple Galton Boardは、無駄を抑えたコンパクトなデザインになっており、シャツのポケットにさえ入ります。

ガルトンボードとパスカルの三角形に取り入れられている原理の理解をさらに促進すべく、私は2023年にアプリ版ガルトンボードを委託制作しました。このアプリ版にはジャイロメーターが使用されており、携帯電話やiPadを傾けると、その中でまるで物理的なビーズが転がっているかのように、ビーズの動きを耳で聞き目で見ることができます。設定アイコンをタップすると、20個のインデックスポートフォリオのヒストグラムを重ねることもでき、リスクの変化に応じてビンのリターン目盛りが変化する様子が見られます。iPhoneおよびiPad用のアプリを入手するには、Apple App Storeにアクセスして「Index Fund Advisors」と検索してください。　そしてAppでガルトンボードのアイコンを探し、対話型ボードにアクセスしてください。 または、MacのノートブックもしくはデスクトップでMac App Storeにアクセスし、ガルトンボードアプリを検索してください。Androidデバイスの場合は、Google Playストアにアクセスして「Index Fund Advisors」と検索してください。



ガルトンボード: アプリ版

アプリを入手

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

Index Fund Advisorsについて

Index Fund Advisors
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

推論ではなく教育を

Index Fund Advisors, Inc.（IFA）は、相談料のみでサービスを提供するアドバイザリーおよび資産管理会社です。フィデューシャリー基準を順守し、リスクに見合っている税務管理されたグローバル分散投資戦略を提供しています。

IFAは、個人、退職金の設計、信託、法人、非営利団体、公的機関および民間機関に投資アドバイスを提供する登録投資アドバイザーです。IFAの設立は1999年で、2024年には25周年を迎えました。IFAは、米国全土のクライアントに投資アドバイスを提供しています。

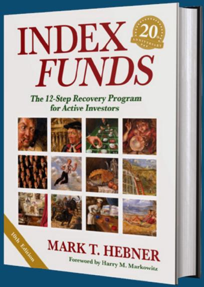
IFAの活動は、投資アドバイスにはとどまりません。総合的財務パートナーとして、投資アドバイスの他、資産管理および資金計画サービスを提供し、クライアントの財務管理を支援しています。 当社のウェルスアドバイザーは、配慮の行き届いた包括的なクライアント体験を目指して、幅広い資産管理サービスおよび財務計画を提供しながら、それぞれのケースに合わせた個別のアプローチでお客様とポートフォリオをマッチングします。

IFAでは、たいていは株式、時間、管理職、スタイル選択に関連している、コストのかかる不要な活動は回避しようと試みています。その代わりに、コスト効率を維持しながら最適な分散を実現すべく設計された、規律ある定量的アプローチを採用しています。

IFAは、Eugene FamaとKenneth Frenchの研究に基づく調査とインデックスを取り入れて、数十年分に及ぶリスクとリターンの履歴データ、第3世代のインデックスファンド設計、およびDimensional Fund Advisorsが開発した精緻なパッシブ取り引き手法を活用しています。

IFAでは、配慮の行き届いた個別のクライアント体験を目指して、税務計画および会計、オンライン財務計画、紹介サービスと並行して、クライアントの状況や目標に合わせた投資管理およびポートフォリオ戦略を提供しています。経験豊富なIFAのウェルスアドバイザーは、クライアントの長期的財務目標の達成をサポートすべく設計された、個別のアドバイスを提供します。

Mark T. Hebnerは、Index Fund Advisors, Inc.（IFA）の創業者で、CEOを務めています。また、投資者教育に焦点を当てた評価の高い書籍『Index Funds: The 12-Step Recovery Program for Active Investors』を著しました。



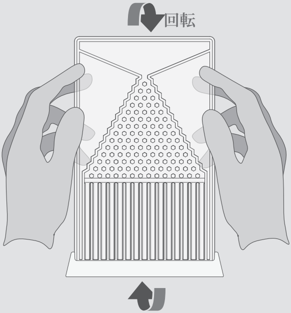
IFAによる財務目標サポートの詳細を確認するには、ifa.comにアクセスするか、当社までお電話ください。

www.ifa.com

Index Fund Advisors, Inc.
19200 Von Karman Ave.
Suite 150
Irvine, CA 92612
888-643-3133
ifa.com | info@ifa.com

ガルトンボードの使用方法

1. ガルトンボードを回転させて、すべてのビーズを溜め場に落とします。
2. ボードをひっくり返して水平面に置き、すべてのビーズがピンに着地するようにします。
3. 大きめのゴールデンビーズを探し、すべてのビーズの分布を観察します。



1873年にTisley & SpillerがFrancis Galtonのために制作したオリジナルのガルトンボードの使用説明。ボード上にGaltonが手書きした説明文には、次のように書かれています。

誤差または分散の法則の
原理を解説する装置
Royal SocietyフェローのFrancis Galtonにより考案

装置を逆さまにして、すべての玉をポケットに送り込みます。もう一度素早く逆さまにし、すぐに水平のテーブルの上に立てます。　玉はすべて、漏斗状の部分に向かって落ちていき、その入り口から入って転がり、すき状の部分をくねくねと通り抜け、底部の縦の区画にたまります。ここで分散の法則が表現されます。

詳細情報、動画、記事、写真、SNSなどを確認するには、ifa.com/galtonboardにアクセス。