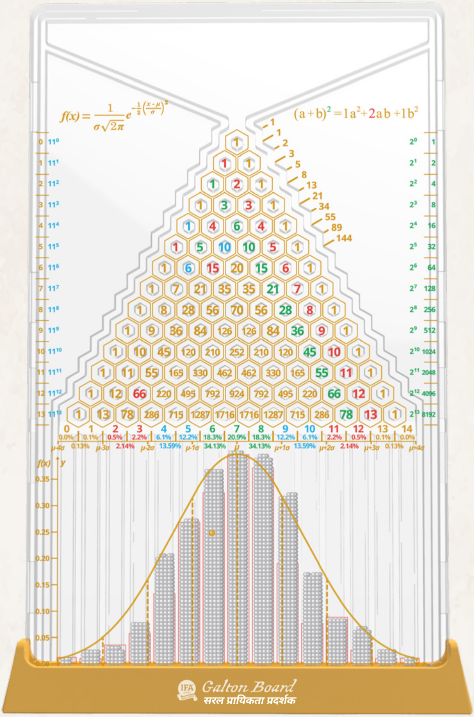
Galton Board

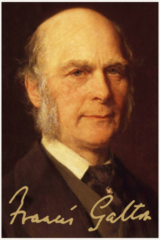
सरल प्रायिकता प्रदर्शक



उपयोगकर्ता मार्गदर्शिका

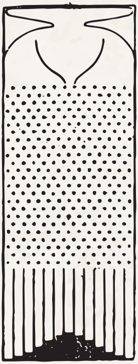
गैल्टन बोर्ड

गैल्टन बोर्ड (सरल संस्करण) पास्कल त्रिभुज के साथ एक 150 मिमी × 95 मिमी का प्रायिकता प्रदर्शक है, जो गणितीय गति और प्रायिकता एवं सांख्यिकी के सामर्थ्य का दृश्य रूप प्रदान करता है। बोर्ड के पिछले हिस्से पर एक सैद्धांतिक निवेश पोर्टफोलियो का हिस्टोग्राम छपा है, जो मार्केट रिटर्न की अनियमितता और प्रायिकताओं को दर्शाता है।



Sir Francis Galton

गैल्टन बोर्ड सदियों पुरानी गणितीय अवधारणाओं को नए ज़माने के, बदलते रहने वाले डेस्कटॉप डिवाइस में दिखाता है। यह सर फ्रांसिस गैल्टन (1822–1911) के 1873 के आविष्कार को सम्मिलित करता है, जिसमें बाइनोमियल डिस्ट्रीब्यूशन को दर्शाया गया था जो बड़ी संख्या में हेक्सागॉन की पंक्तियों और बड़ी संख्या में मनकों के लिए सामान्य वितरण की उस अवधारणा का अनुमान लगाता है, जिसे सेंट्रल लिमिट थ्योरम के नाम से जाना जाता है। वह उनके बोर्ड में लगी कीलों से मनकों के इधर-उधर टकरा कर उछलने से बनने वाले बेल कर्व की व्यवस्था से बेहद मंत्रमुग्ध होते थे। सेंट्रल लिमिट थ्योरम, खासकर डी मोइवर (1667-1754) – लाप्लास (1749-1827) प्रमेय के अनुसार, कुछ परिस्थितियों में सामान्य वितरण को द्विपद वितरण के एक अनुमान के रूप में उपयोग किया जा सकता है।


गैल्टन का मूल चित्र

जब गैल्टन बोर्ड को उल्टा कर दिया जाता है, तो मनके ऊपरी भंडार कक्ष में चले जाते हैं। जब गैल्टन बोर्ड को फिर से पलट कर समतल सतह पर रखा जाता है, तो 4,280 स्टील के मनके और एक बड़ा स्वर्णिम मनका भंडार कक्ष से निकलकर समान दूरी पर रखे हेक्सागॉन की 14 पंक्तियों से होकर गुजरते हैं। सार डिवाइस समतल स्थिति में होता है, तो मनके बाईं या दाईं ओर बढ़ने की समान संभावना के साथ 105 हेक्सागॉन से टकराकर

उछलते हैं। मनके जैसे ही बोर्ड के नीचे बने 15 बिन में से किसी एक में जमा होते हैं, तो वे इकट्ठे होकर घंटी के आकार का हिस्टोग्राम बनाते हैं। गैल्टन बोर्ड को पलटना लगभग 2 सेकंड में 59,920 सिक्के उछालने के जैसा है। चौदह हेड को दर्शाने वाला एक मनका बिन #14 में जाएगा और एक मनका जो कोई भी हेड नहीं दर्शाता (चौदह टेल) वह बिन #0 में में जाएगा।

बोर्ड के सबसे ऊपरी भाग पर सामान्य वितरण और बाइनोमियल एक्सपेंशन के फॉर्मूले छपे हुए हैं। बोर्ड के निचले भाग पर सामान्य वितरण या बेल कर्व छपा हुआ है, साथ ही उस वितरण के सापेक्ष औसत और मानक विचलन की रखाएं भी दिखाई गई हैं। बेल कर्व, जिसे गॉसियन डिस्ट्रीब्यूशन (कार्ल फ्रेडरिक गॉस, 1777-1855) के नाम से भी जाना जाता है, सांख्यिकी और प्रायिकता सिद्धांत के लिए महत्वपूर्ण है। इसका उपयोग गैल्टन बोर्ड के मनके या शेयर बाज़ार का मासिक रिटर्न जैसे प्राकृतिक और सामाजिक विज्ञान में अनियमित वेरिएबल को दिखाने के लिए किया जाता है। आप X-अक्ष और Y-अक्ष के विवरण, साथ ही अपेक्षित प्रतिशतों और मनकों की संख्या सहित संख्यांकित बिन भी देख सकते हैं।


Blaise Pascal

हेक्सागॉन पर पास्कल त्रिभुज (ब्लेज़ पास्कल, 1623–1662) बना है, जो संख्याओं का एक त्रिभुज होता है जो नीचे की संख्या प्राप्त करने के लिए ऊपर की दो संख्याओं को जोड़ने के नियम का पालन करता है। हर हेक्सागॉन पर दी गई संख्या यह दर्शाती है कि किसी मनके के लिए ऊपरी हेक्सागॉन से उस स्थान तक पहुँचने के कितने अलग-अलग रास्ते संभव हैं। यह फिबोनाची संख्याओं (लियोनार्डो फिबोनाची, 1175-1250) को भी दर्शाता है, जो पास्कल त्रिभुज में कुछ खास डायगोनल के योग होते हैं। पास्कल त्रिभुज के अंदर कई सारा गणितीय गुणधर्म और पैटर्न पाए जाते हैं। उनमें शामिल हैं: प्राकृतिक संख्याएँ, पंक्ति के योग, 11 की घातें, 2 की घातें, आकृतिमूलक संख्याएं, डेविड प्रमेय का तारा और हॉकी

स्टिक पैटर्न। पास्कल त्रिभुज के वो दुसरे पैटर्न, जिन्हें इस बोर्ड पर नहीं पहचाना गया है, उनमें अभाज्य संख्याएँ; वर्ग संख्याएँ; बाइनरी संख्याएँ; कैटलन संख्याएँ; बाइनोमियल एक्सपेंशन; फ्रैक्टल; गोल्डन-रश्यो; और सीरपिंस्की त्रिभुज शामिल हैं।

स्टील के 4,280 मनकों में, एक बड़ा स्वर्णिम मनका होता है, जो एक बेतरतीब परिणाम दिखाता है। हर एक बिन के ऊपर इस प्रायिकता का प्रतिशत अनुमान दर्शाया गया है कि कोई मनका उस बिन में जाएगा। सुनहरे मनके की चाल पर गौर करके आप हर बार बोर्ड के पलटने पर बनने वाली संभावनाओं को साफतौर पर देख सकते हैं पीछे बने निवेश पोर्टफोलियो के लाल हिस्टोग्राम के साथ, स्वर्णिम मनका अगले माह के शेयर मार्केट रिटर्न की संभावित सीमा और प्रायिकताओं का दर्शा सकता है। गैल्टन बोर्ड की प्रायिकता कि स्वर्णिम मनका किस बिन में जाएगा शेयर बाजार के पूर्वानुमानकर्ताओं की भविष्यवाणी का एक विकल्प है।

इस गैल्टन बोर्ड में कई सांख्यिकीय और गणितीय अवधारणाएं समाहित होती हैं जिनमें प्रायिकता सिद्धांत, स्वतंत्र एवं समान रूप से वितरित (iid) अनियमित वेरिएबल, सामान्य या घंटी के आकार का कर्व, सेंट्रल लिमिट थ्योरम (डी मोइवर-लाप्लास प्रमेय), बाइनोमियल डिस्ट्रीब्यूशन, बर्नौली (1655-1705) परीक्षण, माध्य पर प्रतिगमन, बड़ी संख्याओं का नियम, सिक्का उछालने जैसी संभावनाएं और शेयर बाजार का रिटर्न, अनियमित चाल, जुआरी का भ्रम, त्रुटियों की आवृत्ति का नियम और वह शामिल है जिसे सर फ्रांसिस गैल्टन ने "अतार्किकता का नियम" कहा था।

IFA.com Since 1999

Galton Board
सरल प्रायिकता प्रदर्शक

गैल्टन के शब्दों में

अपनी किताब नेचुरल इनहेरिटेंस (1889) में सर फ्रांसिस गैल्टन ने उस यंत्र का रोचक ढंग से वर्णन किया जिसे उन्होंने प्रतीत होती अव्यवस्था में व्यवस्था को उजागर करने के लिए तैयार किया था। नीचे दिया गया अंश उस 136 वर्ष पुरानी किताब से लिया गया है। इस पाठ में कुछ संशोधन किए गए हैं ताकि उसका शब्द प्रयोग हमारे गैल्टन बोर्ड के वर्णन में प्रयुक्त आधुनिक शब्दावली से मेल खा सके।

सांख्यिकी का आकर्षण

“यह समझना थोड़ा मुश्किल है कि सांख्यिकीविद् अधिक व्यापक दृष्टिकोणों का आनंद लेने के बजाय अक्सर अपने अध्ययन को केवल औसत तक ही सीमित क्यों रखते हैं। उनकी दिलचस्पी विविधता के आकर्षण के प्रति उतनी ही नीरस लगती है, जितनी कि इंग्लैंड के समतल प्रांतों में से किसी एक निवासी की होती है, जिनकी स्विट्ज़रलैंड के बारे में राय थी कि अगर उनके पहाड़ों को उनकी झीलों में डाल दिया जाए तो दो परेशानियां एक साथ खत्म हो जाएंगी। औसत तो केवल एक अकेला तथ्य है, जबकि यदि उसमें एक और तथ्य जोड़ दिया जाए, तो एक संपूर्ण सामान्य योजना, जो प्रेक्षित योजना से लगभग मेल खाती है, संभावित रूप से अस्तित्व में आ सकती है।”

“कुछ लोगों को तो सिर्फ सांख्यिकी के नाम से ही चिढ़ होती है, लेकिन मुझे इसमें बहुत खूबसूरती और दिलचस्पी दिखती है। लेकिन जब इनका प्रयोग तोड़-मरोड़कर नहीं, बल्कि सौम्यता के उन्नत विधियों से किया जाता है, और सावधानी से इनकी व्याख्या की जाती है, तो ये मुश्किल चीज़ों को समझने में गज़ब की ताकत दिखाती है। ये ही एकमात्र वो औज़ार हैं जिनकी मदद से हम मुश्किलों की उन की घनी झाड़ियों को काट सकते हैं, जो इंसान को समझने के विज्ञान का अध्ययन करने वालों के रास्तों की रूकावट बनती हैं।”

आवृत्ति कर्व के कारण का यांत्रिक चित्रण

“आवृत्ति के कर्व और वितरण के कर्व परिवर्तिनीय हैं: इसलिए यदि इनमें से किसी एक की उत्पत्ति स्पष्ट कर दी जाए, तो दूसरे का बनना

भी सहज रूप से समझ में आ जाता है। अब मैं आवृत्ति कर्व की उत्पत्ति को एक यंत्र (यहाँ दिखाया गया है) के माध्यम से चित्रित करूँगा जो बहुत ही सुंदर ढंग से उन स्थितियों की नकल करता है जिन पर विचलन निर्भर करता है।

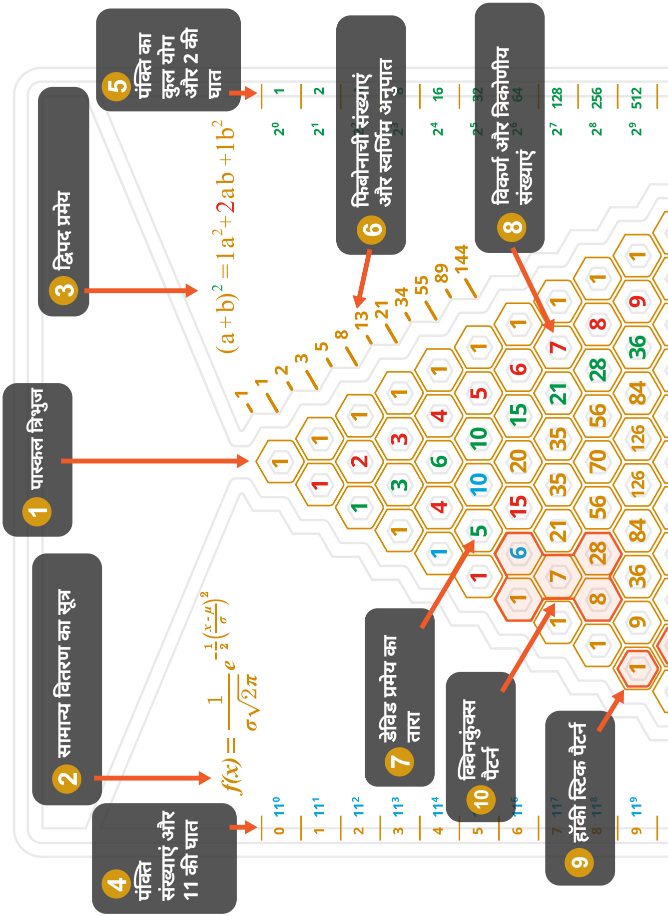
गैल्टन बोर्ड का हमारा डिज़ाइन एक एंटी-स्टैटिक प्लास्टिक फ्रेम से बना है। बोर्ड के ऊपरी हिस्से में एक मनकों का भंडार कक्ष तैयार किया गया है। फ़नल निकासी के नीचे गैल्टन की कीलों के जैसे हेक्सागॉन की 14 पंक्तियों वाला एक क्रम है, जो बोर्ड के पिछले हिस्से में सीधे लगे हैं, और इनके नीचे फिर से 15 बिन या ऊर्ध्वाधर विन की एक श्रृंखला है। बोर्ड में 4,280 स्टील मनकों का एक लोड लगाया गया है। जब बोर्ड को "उल्टा" किया जाता है, तो सभी मनके ऊपरी छोर पर बने भंडार कक्ष में जाने लगते हैं; फिर, जब इसे वापस अपनी कार्य स्थिति में लाया जाता है, तो मनचाही क्रिया शुरू हो जाती है। भंडार कक्ष के किनारे इस तरह से बनाए हुए है जिसके प्रभाव से फ्रेम के ऊपरी छोर पर इकट्ठे हुए सभी मनके फ़नल के मुख की ओर चले जाने लगते हैं।

“मनके फनल से होकर गुजरते हैं और कीलों [हेक्सागॉन] से नीचे की ओर अजीब लेकिन दिलचस्प ढंग से इधर-उधर भागने लगते हैं; उनमें से हर एक मनका जब किसी कील से टकराता है, चाहें जैसा भी मामला हो, तो वह तेजी से दाएं या बाएं ओर एक कदम फुर्ती से लेता है। कीलों को पंचबिंदु (क्विंकनक्स) शैली में व्यवस्थित किया जाता है, ताकि हर एक गिरता हुआ मनका हर अगली पंक्ति में एक कील से टकराता हुआ जाए। फ़नल से निकलती मनकों की धारा नीचे की ओर फैलती जाती है, और आखिर में हर एक मनका अंतिम दो पंक्तियों की कीलों से मुक्त होते ही किसी न किसी बिन में जा फँसता है। बिन में इकट्ठे हुए मनकों का वितरण जिस रूपरखा में होता है, वह लगभग आवृत्ति के कर्व के करीब होता है, और यह आकार बार-बार प्रयोग करने पर भी लगभग समान रहता है।”

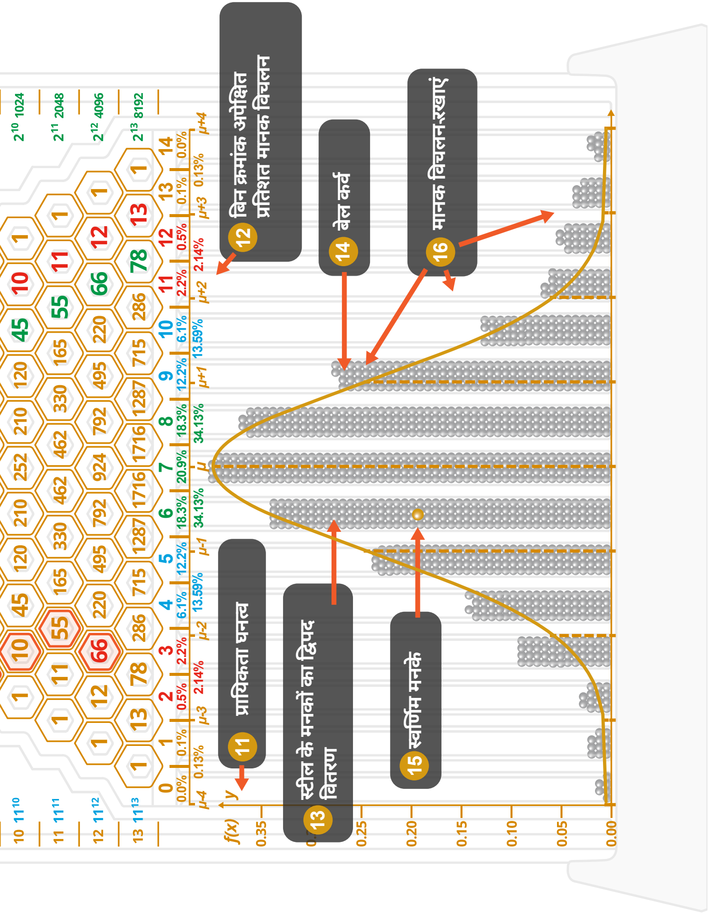
“इस यंत्र की क्रियाविधि का सिद्धांत यह है कि हर एक मनके की राह में अनेक छोटे और स्वतंत्र संयोग घटित होते हैं। कुछ दुर्लभ मामलों में, किसी खास मनके की दिशा को लगातार भाग्य का साथ मिलता है, जिससे वह किसी एक बाहरी बिन की ओर बढ़ता रहता है। लेकिन अधिकांश मामलों में, दाईं ओर विचलन उत्पन्न करने वाले संयोग किसी न किसी हद तक बाईं ओर विचलन उत्पन्न करने वाले संयोगों के साथ संतुलित हो जाते हैं। इसलिए ज़्यादातर मनके उन बिनों में जाते हैं जो फ़नल के मुहाने से ठीक नीचे की ओर सीधी-रखा के पास होते हैं और जिस आवृत्ति से मनके उस ्रखा के दाईं या बाईं ओर अलग-अलग दूरियों पर भटकते हैं वह उन दूरियों के बढ़ने की तुलना में बहुत तेज़ी से घटती है।”

प्रतीत होती अव्यवस्था में व्यवस्था

मैं शायद ही ऐसी कोई चीज़ जानता हूँ जो कल्पना को प्रभावित करने के लिए इतनी उपयुक्त हो जितनी कि ब्रह्मांडीय व्यवस्था का अद्भुत रूप जिसे 'त्रुटि की आवृत्ति के नियम' द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि यूनानी इस नियम के बार में जानते, तो वे इसे मानवीय रूप देते और देवता के रूप में पूजते। यह प्रचंड कोलाहल के बीच भी शांति और पूर्ण आत्म-विनाश के साथ राज करता है। भीड़ जितनी बड़ी होती है और जितनी अराजक दिखती है, उसका प्रभाव उतना ही अधिक सटीक होता है। यह अतार्किकता का सर्वोच्च नियम है। जब अराजक तत्वों के किसी बड़े नमूने को उनके परिमाण के क्रम में व्यवस्थित किया जाता है, तो उसमें एक अप्रत्याशित और अत्यंत सुंदर नियमितता का रूप हमेशा से छिपा हुआ पाया जाता है। क्रमबद्ध किए गए बिन के शीर्ष अपरिवर्तनीय अनुपात का प्रवाहित कर्व बनाते हैं; और प्रत्येक तत्व को, जैसे ही इसे जगह में क्रमबद्ध किया जाता है, मानो जैसे यह कोई पूर्व-निर्धारित स्थान हो, उसमें फिट होने के लिए सटीक रूप से अनुकूलित किया गया हो। यदि बिन में किन्हीं दो निर्धारित ग्रेड पर माप पता हो, तो एकदम सिर को छोड़कर, अन्य सभी ग्रेड पर जो माप मिलेंगे, उनका पूर्वानुमान पहले से बताए गए तरीके से, और बेहद सटीकता के साथ लगाया जा सकता है।”



1 पास्कल त्रिभुज
2 सामान्य वितरण का सूत्र
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
3 द्विपद प्रमेय
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
4 पंक्ति संख्याएं और 11 की घात
5 पंक्ति का कुल योग और 2 की घात
6 फिबोनाची संख्याएं और स्वर्णिम अनुपात
7 डेविड प्रमेय का तारा
8 विकर्ण और त्रिकोणीय संख्याएं
9 हॉकी स्टिक पैटर्न
10 क्विनकुंक्स पैटर्न


11 प्रायिकता घनत्व
12 बिन क्रमांक अपेक्षित प्रतिशत मानक विचलन
13 स्टील के मनकों का द्विपद वितरण
14 बेल कर्व
15 स्वर्णिम मनके
16 मानक विचलन-रेखाएं

गैल्टन बोर्ड की विशेषताएं

1 पास्कल त्रिभुज

पास्कल का त्रिभुज संख्याओं का वो त्रिभुज होता है जो नीचे की संख्या प्राप्त करने के लिए ऊपर की दो संख्याओं को जोड़ने के नियम का पालन करता है। यह पैटर्न अनंत तक चलता रह सकता है। ब्लेज़ पास्कल ने प्रायिकता सिद्धांत का अध्ययन करने के लिए त्रिभुज का उपयोग किया, जैसा कि उनके गणितीय ग्रंथ *Traité du triangle arithmétique* में बताया गया है। फारस, भारत, चीन, जर्मनी और इटली में अन्य गणितज्ञों ने उनसे सदियों पहले ही इसका अध्ययन कर लिया था। इस त्रिभुज के पैटर्न द्विपद गुणांक की गणितीय विशेषताओं में रूपांतरित होते हैं। गैल्टन बोर्ड पर रखे जाने पर, हेक्सागॉन पर प्रत्येक संख्या उन रास्तों की संख्या को दर्शाती है जो एक मनका उस हेक्सागॉन तक पहुँचने के लिए अपना सकता है।

2 सामान्य वितरण का सूत्र

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

प्रायिकता सिद्धांत में, सामान्य वितरण एक प्रकार का सतत प्रायिकता वितरण है जो वास्तविक मान वाले अनियमित वेरिएबल के लिए प्रयुक्त होता है। यहाँ दिखाया गया इसकी प्रायिकता घनत्व फलन का सामान्य रूप है $\boldsymbol{f(x)}$. सामान्य वितरण सांख्यिकी में अत्यंत महत्वपूर्ण है और अक्सर इनका उपयोग प्राकृतिक तथा सामाजिक विज्ञानों में उन वास्तविक मान वाले अनियमित वेरिएबल को निरूपित करने के लिए किया जाता है, जिनका वितरण ज्ञात नहीं होता। इस सूत्र में स्थिरांक पाई ($\boldsymbol{\pi \approx 3.142}$) शामिल है, जो एक वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात है। इसमें यूलर संख्या ($\boldsymbol{e \approx 2.718}$) भी शामिल है, जो प्राकृतिक लघुगणक का आधार है। iid सेंट्रल लिमिट थ्योरम बताता है कि जैसे-जैसे नमूने का आकार बड़ा हो जाता है और सिग्मा ($\boldsymbol{\sigma}$) परिमित होता है, तो अनियमित वेरिएबल $\boldsymbol{X}$ सामान्य रूप से वितरित होगा।

3 द्विपद प्रमेय

द्विपद प्रमेय किसी द्विपद के घातों के बीजीय विस्तार का वर्णन करता है। पास्कल का त्रिभुज उन गुणांकों को परिभाषित करता है जो बाइनोमियल एक्सपेंशन में दिखाई देते हैं। जिसका मतलब है कि पास्कल त्रिभुज की **n**वीं पंक्ति बहुपद $(a + b)^n$के विस्तारित व्यंजक के गुणांकों से बनी है। गैल्टन बोर्ड के लिए, द्विपद बाएँ और दाएँ $(L + R)^n$ हैं।

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(L+R)^3 = 1L^3 +3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

$(a + b)^n$ का विस्तार $(a + b)^n = x_0a^n + x_1a^{n-1}b + x_2a^{n-2}b^2 + \ldots + x_{n-1}ab^{n-1} + x_nb^n$ है जहाँ x_k के रूप के गुणांक ठीक वही संख्याएँ होती हैं जो पास्कल त्रिभुज (**k** और **n** की गिनती 0 से शुरू होती है) की **n**वीं पंक्ति की **k** वीं प्रविष्टि में दिखाई देती हैं। इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है: $x_k = \binom{n}{k}$, अर्थात, "**n** **k**चुनें।" गैल्टन बोर्ड पर पहला हेक्सागॉन है $\binom{0}{0}$, जिसके नीचे $\binom{1}{0}$ और $\binom{1}{1}$आते हैं।

n = 2 के लिए $(a + b)^n$ और **n = 3** के लिए $(L + R)^n$ के लिए द्विपद व्यंजक के उदाहरण बोर्ड पर दिखाए गए हैं।

4 पंक्ति संख्याएं और 11 की घात

बाईं तरफ पास्कल त्रिभुज की 14 पंक्तियाँ को क्रमांकित किया गया है। पहली पंक्ति को = 0 और प्रत्येक पंक्ति की पहलीसंख्या को = 0 के रूप में दर्शाया गया है। चौदह पंक्तियाँ पर्याप्त रूप से बड़ी होती हैं, जिससे प्राप्त द्विपद वितरण सतत सामान्य वितरण का एक अच्छा विविक्त सन्निकटन बन जाता है।

यदि आप हर एक घटक को एक अंक (और यदि घटक में एक से अधिक अंक हों तो उसे बाईं ओर ले जाएं) मानकर पंक्ति को एक संख्या में समेटते हैं, तो आपको ग्यारह की घात (**11^n**) प्राप्त होती है: 1, 11, 121, 1331, 14641... जो उस पंक्ति के पास्कल त्रिभुज की संख्याओं से मेल खाती है।

5 पंक्तियों का योग और 2 की घात

एक पंक्ति में संख्याओं का योग **2^n** के बराबर होता है, जहाँ n पंक्ति संख्या के बराबर है। उदाहरण के लिए, तीसरी पंक्ति में, पास्कल की संख्याओं का योग करने पर, 1 + 3 + 3 + 1 = 8, जो 2^3 के बराबर भी है।

प्रत्येक पंक्ति में संख्याओं का योग भी दो की घात के आगे दर्शाया गया है, और प्रत्येक अगली पंक्ति में यह योगफल दोगुना होता है। इसके अतिरिक्त, किसी पंक्ति के सभी पदों के वर्गों का योग उस पंक्ति की मध्य प्रविष्टि के दो गुना के बराबर होता है। उदाहरण के लिए, यदि आप चौथी पंक्ति के पदों के वर्गों का योग क्र ($1^2+4^2+6^2+4^2+1^2$), जो कि सत्तर के बराबर है, जो आठवीं पंक्ति की मध्य प्रविष्टि भी है।

6 फिबोनाची संख्याएं और गोल्डन-रश्यो

पास्कल त्रिभुज पर दर्शाए गए डायगोनल पर संख्याओं का योग फिबोनाची संख्याओं से मेल खाता है। यह अनुक्रम इस प्रकार आगे बढ़ता है: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, और इसी तरह आगे भी। इस अनुक्रम में प्रत्येक संख्या पिछली दो संख्याओं का योग है। उदाहरण के लिए: 2+3=5; 3+5=8; 5+8=13; 8+13=21.... लियोनार्डो फिबोनाची ने अपनी किताब *Liber Abaci*(1202) में इन संख्याओं को लोकप्रिय बनाया। जैसे-जैसे आप फिबोनाची संख्याओं में आगे बढ़ते हैं, क्रमागत संख्याओं का अनुपात गोल्डन-रश्यो ($\varphi \approx 1.61803398...$) के समीप पहुँचता है, लेकिन कभी भी इसके बराबर नहीं होता। उदाहरण के लिए: 55/34=1.618; 89/55=1.618; और 144/89=1.618. गोल्डन-रश्यो को सर्वप्रथम यूक्लिड ने अपनी किताब *Elements* में परिभाषित किया था, जो 300 ईसा पूर्व में लिखी गई थी। लियोनार्डो दा विंची ने अपनी उत्कृष्ट कृतियों के निर्माण में इस अनुपात का उपयोग किया था। गोल्डन-रश्यो का समीकरण है:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 डेविड प्रमेय का तारा

डेविड प्रमेय का तारा कहता है कि किसी संख्या के आसपास की तीन संख्याओं के दो सेट का गुणनफल बराबर होता है। दिखाए गए उदाहरण में, संख्या 5 के चारों ओर क्रमशः संख्या 1, 4, 10, 15, 6, 1 स्थित हैं और एकांतर संख्याएं लेते हुए, हमारे पास 1×10×6 = 4×15×1 = 60 है।

8 क्विनकुंक्स पैटर्न

बोर्ड पर रखे हेक्सागॉन क्विनकुंक्स पैटर्न में हैं, जो पाँच वस्तुओं की एक ऐसी व्यवस्था है, जिसमें से चार वस्तुएं एक वर्ग या आयत के कोनों पर हैं और पाँचवीं वस्तु उसके केंद्र (जैसे पासे पर 5) में है।

9 डायगोनल और त्रिकोणीय संख्याएं

डायगोनल में, बाएँ और दाएँ किनारों पर केवल 1 लिए, सिम्पलाइज़ की आकृतिमूलक संख्याएं होती हैं। इसके बाद के डायगोनल में प्राकृतिक या गणना संख्याएं होती हैं, फिर त्रिकोणीय संख्याएं (समबाहु त्रिभुजाकार व्यवस्था में बिंदुओं की संख्या), फिर चतुष्फलकीय संख्याएं (त्रिकोणीय पिरामिडीय संख्याएं), फिर पंचकोणीय संख्याएं और उसके बाद 5, 6, और 7 सिंप्लेक्स संख्याएं होती हैं। प्रत्येक प्राकृतिक संख्या का वर्ग तीसरे डायगोनल (त्रिकोणीय संख्याएं) पर आसन्न प्रविष्टियों के एक जोड़े के योग के बराबर होता है। उदाहरण: $7^2 = 49 = 21 + 28$

10 हॉकी स्टिक पैटर्न

किसी डायगोनल में संख्याओं का योग, 1 के साथ किनारे से शुरू करते हुए, नीचे अगले डायगोनल में मौजूद संख्या के बराबर होता है। इन संख्याओं को रेखांकित करने पर एक हॉकी स्टिक पैटर्न का पता चलता है, जैसा कि यहाँ इसमें 1 + 10 + 55 = 66 में देखा जा सकता है।

11 प्रायिकता घनत्व

प्रायिकता घनत्व $f(x)$ अवलोकनों और उनकी प्रायिकता के बीच का संबंध होता है। यह निरंतर अनियमित वेरिएबल की एक विशेष श्रृंखला के अंदर एक अनियमित वेरिएबल के घटित होने की संभावना को परिभाषित करता है। एक महत्वपूर्ण प्रायिकता घनत्व फलन गॉसियन या सामान्य, अनियमित वेरिएबल का होता है, जो एक घंटी के आकार के कर्व जैसा दिखता है। इन $f(x)$ के मान को, 1 के सिग्मा (σ) के साथ एक सामान्य वितरण माना जाता है।

12 बिन नंबर, अपेक्षित प्रतिशत एवं मानक विचलन

15 मनकों वाले बिन को 0 से 14 तक नंबर दिए गए हैं ताकि स्वर्णिम मनके का स्थान आसानी से पहचाना और रिकॉर्ड किया जा सके। इसके अलावा, पास्कल त्रिभुज से किसी अनियमित परिणाम की एक निश्चित बिन में घटित होने की प्रायिकताओं को त्रिभुज की 15वीं पंक्ति (n=14) को मान कर पहचाना जा सकता है।

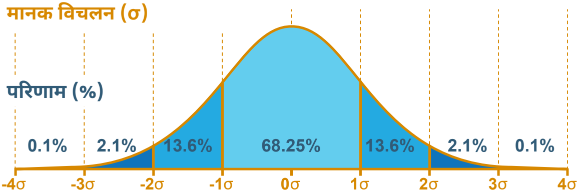
प्रत्येक बिन के परिणामों का अपेक्षित प्रतिशत, मध्यम बिन में अपेक्षित (#7) 20.9 प्रतिशत के साथ, बिन संख्या के ठीक नीचे दर्शाया गया है।

बिन के नीचे सूचना का अक्ष मानक विचलन अक्ष है। कर्व में प्रत्येक मानक विचलन लाइन के ऊपर उसके अनुरूप मान दिखाया गया है, जो माध्य से लेकर 4 मानक विचलन ($\mu \pm 4\sigma$) तक की संख्या को दर्शाता है। एक तीर यह दर्शाने के लिए लगाया गया है कि ±4 मानक विचलन अंतिम बिन से आगे तक फैला हुआ है। बेल कर्व के केंद्र में स्थित रखा औसत (माध्य, μ, "mu") है। प्रत्येक मानक विचलन लाइन के बीच परिणामों का प्रतिशत होता है जो बेल कर्व के उस क्षेत्र के लिए अपेक्षित होगा।

13 बेल कर्व

सामान्य वितरण, जिसे अक्सर "बेल कर्व" भी कहा जाता है, सभी प्रायिकता वितरणों में सबसे अधिक प्रसिद्ध और सबसे ज्यादा उपयोग किया जाने वाला वितरण है। सामान्य वितरण चूँकि कई प्राकृतिक घटनाओं का अनुमान इतने अच्छे से लगाता है, इसलिए

यह कई प्रायिकता समस्याओं के लिए एक मानक संदर्भ के रूप में विकसित हो गया है। डेटा के कई सेट सामान्य वितरण का पालन करते हैं, जैसे वयस्कों की ऊँचाई, शिशुओं का भार, कक्षा परीक्षा के अंक, शेयर बाज़ार सूचकांकों के मासिक रिटर्न के बड़े नमूने, और गैल्टन बोर्ड में मनके। नीचे दिया गया डायग्राम बेल कर्व को मानक विचलनों से विभाजित करके दर्शाता है।



इस वास्तविक गैल्टन बोर्ड में छोटे हेक्सागॉन और चैनलों की बाध्यताओं के कारण बेल कर्व अधिक चौड़ा हो जाता है। हमने बोर्ड पर एक "बेस्ट फिट" कर्व छापा है जो ऊपर दिखाए गए कर्व से थोड़ा अलग है।

14 स्टील के मनकों का द्विपद वितरण

स्टील का हर एक मनका **स्वतंत्र एवं समान रूप से वितरित (iid)** एक अनियमित वेरिएबल को दर्शाता है जो हेक्सागॉन के एक निश्चित पैटर्न के जरिए भंडार कक्ष से गिरता है। हर एक मनके के लिए 14 बर्नौली परीक्षणों से प्राप्त हजारों स्टील मनकों द्वारा एक द्विपद वितरण निर्मित होता है, प्रत्येक हेक्सागन से टकराने के लिए एक परीक्षण। मनकों का विविक्त द्विपद वितरण लगभग पूरी तरह से सतत सामान्य वितरण के समान होता है।

15 स्वर्णिम मनके

0.8 मिमी स्टील के 4,280 मनकों के बीच 2.0 मिमी का एक स्वर्णिम मनका भी होता है। यह मनका एकल अनियमित परिणाम को दर्शाता है।

16 मानक विचलन रखाएं

मानक विचलन (σ) इस बात का माप है कि सभी डेटा बिंदु माध्य (μ) के कितने निकट इकट्ठे होते हैं। सामान्य वितरण का आकार माध्य और मानक विचलन से निर्धारित किया जाता है। सामान्य वितरण में लगभग 68 प्रतिशत डेटा माध्य के एक मानक विचलन के अंतर्गत आता है। इसका लगभग 95 प्रतिशत दो मानक विचलनों के अंतर्गत आता है, लगभग 99.7 प्रतिशत तीन मानक विचलनों के अंतर्गत आता है, और लगभग 99.99 प्रतिशत चार मानक विचलनों के अंतर्गत आता है। पास्कल त्रिभुज में हेक्सागॉन की 14 पंक्तियों के साथ, त्रिभुज की निचली पंक्ति में 14 हेक्सागॉन मौजूद होते हैं। इसमें पंद्रह बिन होते हैं, प्रत्येक छोर पर एक बिन तथा प्रत्येक हेक्सागॉन के बीच में एक बिन। ये 15 बिन कुल 2x15/14 = 8.0 वितरण मानक विचलन ($\mu \pm 4\sigma$) को दर्शाते हैं। प्रत्येक बिन 0.533 मानक विचलन के बराबर है और प्रत्येक मानक विचलन 1.875 बिन के बराबर है (8/15 = 0.533 या 15/8 = 1.875)।

एक नमूने का मानक विचलन

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

एक नमूने का मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

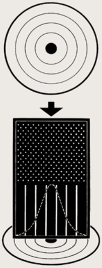
गैल्टन बोर्ड पर ईम्स का नजरिया

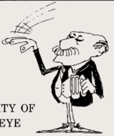
उनके गैल्टन बोर्ड के लिए ईम्स का सूचना-चित्र

हमारा गैल्टन बोर्ड एक डेस्कटॉप डिज़ाइन है जो चार्ल्स और र ईम्स के 11 फुट ऊँचे "गैल्टन के प्रायिकता बोर्ड" की याद दिलाता है, जिसे 1961 के मैथेमेटिका में प्रदर्शित किया गया था: संख्याओं की एक दुनिया... और उससे से भी पर। साल 1964 के विश्व मेले के लिए न्यूयॉर्क में इससे भी बड़ा 14 ½ फुट ऊँचा ईम्स का प्रायिकता बोर्ड IBM के मंडप में प्रदर्शित किया गया था। दाईं ओर चित्रित 1961 के मैथेमेटिका प्रदर्शनी से सूचना चिह्न का एक छोटा संस्करण है।

GALTON'S

PROBABILITY BOARD





THIS MACHINE DEMONSTRATES HOW A PROBABILITY CURVE CAN BE FOUND BY EXPERIMENT

HORACE HAS A DEFINITE PROBABILITY OF HITTING THE BULLSEYE

HE CAN GET AN IDEA OF THIS PROBABILITY BY COUNTING THE NUMBER OF DARTS THAT HIT THE BULLSEYE, AND COMPARING IT WITH THE TOTAL NUMBER HE THROWS.

THE MORE DARTS HE THROWS, THE BETTER HIS CHANCES OF GETTING A GOOD ESTIMATE.

IN EFFECT, THE GALTON BOARD THROWS A BALL AT THE CENTER BOX.

THE PINS INTRODUCE ERRORS (AS HORACE DOES) THAT MAKE MOST OF THE BALLS MISS THE BULLSEYE.

WE CAN ESTIMATE THE PROBABILITY OF HITTING A GIVEN BOX BY COUNTING THE NUMBER OF BALLS THAT LAND IN THE BOX.

NOTICE HOW CLOSELY THE CURVE FORMED BY THE BALLS MATCHES THE CURVE PAINTED ON THE GLASS

A ball can land in any box, and yet any given box fills to nearly the same height each time the experiment is repeated.

THIS STABILITY IS DUE TO THE FACT THAT THERE ARE MANY BALLS.

Unpredictable | **More Predictable**

IF A RANDOM EVENT HAPPENS A GREAT MANY TIMES THE AVERAGE RESULTS ARE LIKELY TO BE PREDICTABLE.*

*The first mathematical theorem of this kind was proved by Jacob Bernoulli.

"With the probability approaching certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event in a series of independent trials with constant probability will differ from that probability by less than any given positive number, provided the number of trials is sufficiently large."

Jacob Bernoulli (1654-1705)

"RELATIVE FREQUENCY" is the number of times an event* occurs divided by the number of trials.**

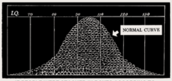
In the Probability Board the release of a ball is a ** TRIAL.

Landing (or not landing) in a given box is an * EVENT.

The curve painted on the glass was calculated by a formula.

THIS CURVE IS A PARTICULAR THEORETICAL CURVE CALLED THE "NORMAL CURVE", WHICH DESCRIBES THE BEHAVIOR OF SUCH THINGS AS–

I.Q. TESTS



IF PEOPLE WERE STACKED IN BOXES ACCORDING TO THEIR I.Q. SCORES, THEY WOULD FORM THE "NORMAL CURVE."

THE MEASUREMENTS OF BEAUTY CONTEST WINNERS

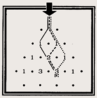
RUN AT ROULETTE

ERRORS IN MEASUREMENT

WHEN THE BALLS ARE DROPPED, THEY ARE ALL AIMED AT THE CENTER BOX. THE SUM OF ALL THE ERRORS CAUSED BY HITTING THE PINS DETERMINES THE BALLS' FINAL POSITION.

The average of many independent errors almost always leads to the Normal Curve, no matter what the underlying process may be.

THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IS A PRECISE STATEMENT OF CONDITIONS WHICH LEAD TO THE NORMAL CURVE.



LaPLACE (1749-1827)

DeMOIVRE (1667-1754)

PASCAL'S TRIANGLE

The number of possible paths to a given space in the array of pins is given by Pascal's Triangle. For the number of paths to a space is the sum of the number to the two spaces above it. The probability of a ball's dropping in any box can be found by counting the number of paths to that box, and comparing it with the total number of paths.

As the number of trials gets large, the distribution of the balls is likely to be near normal. This idea, first stated in Abraham de Moivre's "Doctrine of Chances," was later proved by the Marquis de Laplace, and called the Laplace-de Moivre limit theorem. Hard work during the next hundred years eventually produced a much more general statement of the same sort, the "central limit theorem," universally conceded to be one of the most important results of probability theory.

PROBABILITY IS ADDITIVE

IF THE PROBABILITY OF "5" IS $\frac{1}{6}$ AND THE PROBABILITY OF "4" IS $\frac{1}{6}$

THEN THE PROBABILITY OF "5" OR "4" IS 1/6 + 1/6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

PROBABILITY, LIKE AREA, IS ADDITIVE. HENCE, IT IS OFTEN POSSIBLE TO REPRESENT PROBABILITY AS THE AREA UNDER A CURVE.

For example, in the Galton Board, the probability of getting in -

this box | or in either of these 2 boxes | or in any of these 3 boxes

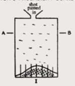
is represented by the corresponding area.

The branch of mathematics concerned with determination of lengths and areas is called "MEASURE THEORY." Probability is a branch of the Theory of Measure.

THE QUINQUNX

The pins in the Galton Board are often arranged in a figure found in nature - the four corners of a square with a pin in the center, called a Quincunx.

GALTON'S PROBABILITY BOARD -1877



GALTONIA (Hyacinthus candicanus)

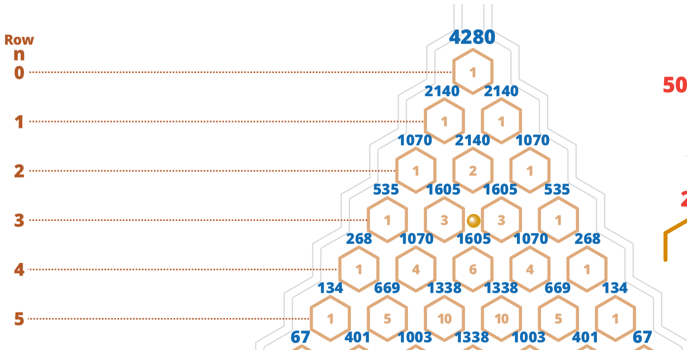
SIR FRANCIS GALTON (1822-1911)

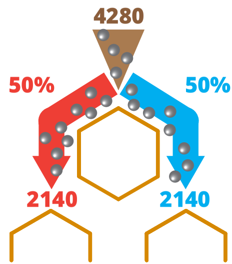
Galton was a cousin of Charles Darwin. In addition to mathematics, he studied and wrote about Botany, Heredity, Geography, Psychology, Statistical Methods, and Mountain Climbing.

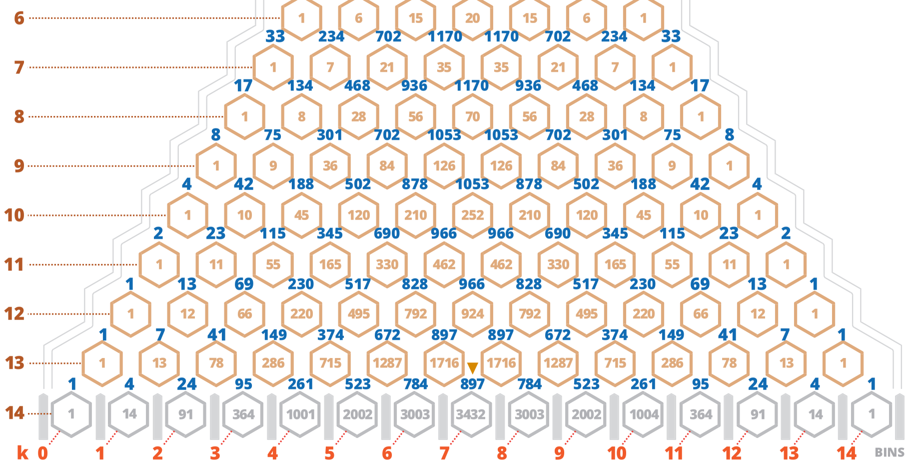
IBM

मनकों का सिमेट्रिक द्विपद वितरण

एक समतल गैल्टन बोर्ड के लिए, इस बात की समान संभावना होती है कि मनके प्रत्येक हेक्सागॉन के शीर्ष पर बाएँ या दाएँ जाएंगे। यह बर्नौली परीक्षण का एक उदाहरण है। यह चित्रण हर एक हेक्सागॉन के बीच से गुजरने वाले अपेक्षित मनकों की संख्या को दर्शाता है। मनका के भंडार कक्ष में लगभग 4,280 मनके हैं। पहले हेक्सागॉन पर, जिसे शून्य पंक्ति माना जाता है, 2,140 मनकों के बाईं ओर और 2,140 मनकों के दाईं ओर जाने की अपेक्षा की जाती है। यदि आप मनकों के विभाजन का अनुकरण करते हैं तो हर बार आप यह देख सकते हैं कि 14वीं पंक्ति (पंक्ति 13) के बाद प्रत्येक बिन में कितने मनके आने की अपेक्षा है। पास्कल त्रिभुज के प्रत्येक हेक्सागॉन पर लिखी संख्या को इस रूप में व्याख्यायित किया जा सकता है कि पंक्ति **n** में स्थान **kth** तक पहुँचने के कितने मार्ग संभव हैं। उदाहरण के लिए, पंक्ति 4 में हेक्सागॉन पर संख्याएं **1, 4, 6, 4, 1** हैं। यदि हम उन संख्याओं को जोड़ देते हैं, तो हमें पंक्ति 4 के सभी 5 हेक्सागॉन तक पहुँचने के लिए कुल 16 मार्ग मिलते हैं। यह भी पंक्ति संख्या ($2^4 = 16$) की घात 2 है।



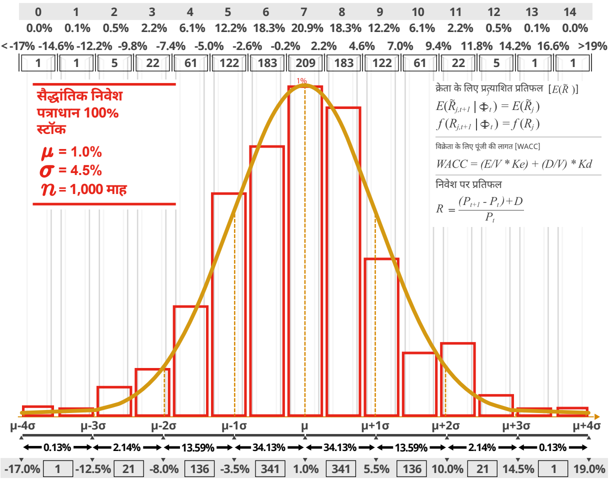




पास्कल त्रिभुज की पंक्ति 14 (ग्रे रंग में) का उपयोग गैल्टन बोर्ड के नीचे स्थित 15 बिन में से प्रत्येक बिन में एक मनके के गिरने की प्रायिकताओं (एक सिमेट्रिक द्विपद वितरण) को निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है। उपरोक्त n=4 की गणना के अनुसार, पंक्ति 14 के मध्य बिन (k = 7) में अपेक्षित प्रतिशत होगा 3,432/16,384 = 20.95%. 4,280 मोतियों के साथ, इसका मतलब यह होगा कि उस बिन में 897 मनकों के गिरने की उम्मीद है। यदि उसमें 16,384 मनके होते, तो पंक्ति 14 में प्रत्येक हेक्सागॉन पर अंकित संख्याएं प्रत्येक बिन में आने वाले मनकों के बराबर होंगी।

निवेश पोर्टफोलियो के चित्रण

मार्केट रिटर्न को दिखाने के लिए, हमने एक सैद्धांतिक निवेश पोर्टफोलियो का चयन किया। बोर्ड के पीछे छपी लाल पट्टियां एक सैद्धांतिक निवेश पोर्टफोलियो के 1,000 मासिक रिटर्न के वितरण का एक हिस्टोग्राम दर्शाती हैं। लाल पट्टी एक 100% स्टॉक पोर्टफोलियो (आक्रामक) को दर्शाती है, जिसके बाृर में हम मानते हैं कि इसका मासिक औसत रिटर्न 1.0% और मानक विचलन 4.5% है, और इसके सैंपल साइज 1,000 माह का है। चार मानक विचलनों के साथ, इससे रिटर्न का दायरा लगभग 17% to 19% [1-(4x4.5)= -17, 1+(4x4.5) = 19] तक हो जाती है। इसका अर्थ है कि 15 बिन होने पर प्रत्येक बिन का रिटर्न दायरा 2.4% है, और औसत रिटर्न 1.0% ठीक मध्य में स्थित है।



अपेक्षित प्रतिशत और रिटर्न के साथ बिन विभाजक

	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14	
	0.0%		0.1%		0.5%		2.2%		6.1%		12.2%		18.3%		20.9%		18.3%		12.2%		6.1%		2.2%		0.5%		0.1%		0.0%	
<-17%		-14.6%		-12.2%		-9.8%		-7.4%		-5.0%		-2.6%		-0.2%		2.2%		4.6%		7.0%		9.4%		11.8%		14.2%		16.6%		>19%
	1		1		5		22		61		122		183		209		183		122		61		22		5		1		1	

मार्केट रिटर्न के हिस्टोग्राम के ऊपर विचार करने योग्य चार पैमाने हैं। पहला पैमाना केवल 0 से 14 तक 15 बिन की क्रम संख्या है । दूसरा पैमाना उन अनियमित वेरिएबल का प्रतिशत है, इस मामले में मासिक रिटर्न, जिनके प्रत्येक बिन में आने की अपेक्षा की जाती है। तीसरा पैमाना प्रत्येक बिन के लिए मासिक रिटर्न सीमा के अपेक्षित प्रतिशत का अनुमान है। बिन विभाजकों का इस प्रकार से मापा जाता है कि बोर्ड का किनारा, रिटर्न के चार मानक विचलनों, या $\mu \pm 4\sigma$ या परिणामों के ≈99.99 प्रतिशत से मेल खाता हो। निचला पैमाना प्रत्येक बिन में अपेक्षित महीनों की संख्या को दर्शाता है, जो 1,000 माह के सैंपल साइज पर आधारित है।

निचला अक्ष

μ-4σ		μ-3σ		μ-2σ		μ-1σ		μ		μ+1σ		μ+2σ		μ+3σ		μ+4σ
	←0.13%→		←2.14%→		←13.59%→		←34.13%→		←34.13%→		←13.59%→		←2.14%→		←0.13%→	
-17.0%	1	-12.5%	21	-8.0%	136	-3.5%	341	1.0%	341	5.5%	136	10.0%	21	14.5%	1	19.0%

इस निचले अक्ष पर तीन पैमाने हैं। पहला पैमाना मानक विचलन लाइन की पहचान करता है। दूसरा पैमाना प्रत्येक मानक विचलन लाइन के बीच अपेक्षित परिणामों का प्रतिशत दर्शाता है। तीसरी पंक्ति अनुमान लगाती है कि 1,000 माह के सैंपल के आधार पर प्रत्येक मानक विचलन लाइन के बीच कितने मासिक रिटर्न अपेक्षित हैं।

अनियमित चाल मॉडल

कुशल बाजार परिकल्पना कहती है कि किसी प्रतिभूति (j) का वर्तमान मूल्य ($p_{j,t}$) उपलब्ध जानकारी (Φ_t) को पूर्णतः प्रतिबिंबित करता है, "... यह कि एक के बाद एक मूल्य परिवर्तन या, अधिक सामान्यतः, एक के बाद एक अवधि के रिटर्न, स्वतंत्र होते हैं। इसके अलावा, इसका मानना है कि एक के बाद एक परिवर्तन, या रिटर्न,

समान रूप से वितरित होते हैं। एक साथ मिलकर, दोनों परिकल्पनाएँ अनियमित चाल मॉडल का गठन करती हैं। औपचारिक तौर पर, मॉडल कहता है कि:

$$f(R_{j,t+1} \mid \Phi_t) = f(R_j),$$

जो कि सामान्य कथन है कि एक स्वतंत्र अनियमित वेरिएबल के सशर्त और सीमांत प्रायिकता वितरण समान होते हैं। इसके अलावा, घनत्व फलन (f) सभी समय (t) के लिए समान होना चाहिए।" यदि हम यह मान लें कि किसी प्रतिभूति पर अपेक्षित रिटर्न समय के साथ स्थिर हो, तो हमारे पास है

$$E(\tilde{R}_{j,t+1} \mid \Phi_t) = E(\tilde{R}_j).$$

स्रोत: यूजीन एफ. फामा और मर्टन एच. मिलर, *वित्त का सिद्धांत,* 1972, पेज 339

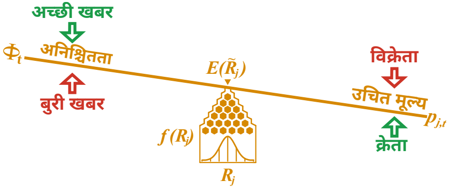
हेबनर मॉडल

नीचे दिए सीसॉ के ये डायग्राम यूजीन फामा की कुशल बाजार परिकल्पना को दर्शाते हैं, जो बताता है कि प्रतिभूतियों (j) की कीमतें सभी उपलब्ध सूचनाओं को पूरी तरह से प्रतिबिंबित करती हैं जिसके परिणामस्वरूप उचित मूल्य प्राप्त होते हैं। सीसॉ का बायाँ भाग सूचनाओं के उस समूह को दर्शाता है जिसे (Φ_t) उस समय की कीमत (t) में पूरी तरह से प्रतिबिंबित किया गया माना है और दायाँ भाग उन कीमतों ($p_{j,t}$) को दर्शाता है जिन्हें लाखों इच्छुक खरीदारों और विक्रेताओं ने उस समय की जानकारी के समूह को देखते हुए उचित मूल्य माना है। कुशल बाजार परिकल्पना यह दावा करती है कि, एक सुव्यवस्थित, यथोचित पारदर्शी बाज़ार में, बाज़ार मूल्य (p_t) आम तौर पर उचित मूल्य के बराबर या उसके करीब होता है, क्योंकि निवेशक प्रतिभूतियों के लिए नकदी के आदान-प्रदान में सापेक्ष दुर्लभता, उपयोगिता, या संभावित रिटर्न के बारे में नई जानकारी (Φ_t) को शामिल करने के लिए तुरत प्रतिक्रिया देते हैं।

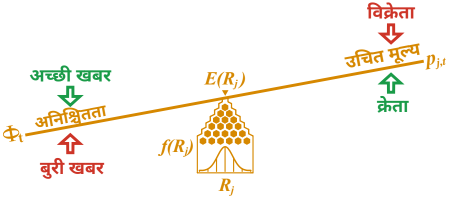
मार्क हेबनर के दिमाग में 2008 के वैश्विक वित्तीय संकट के दौरान इस मॉडल के तीन कंपोनेंट्स आए थे। इसकी शुरुआत पास्कल त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित सीसॉ से होती है। फिर, हेक्सागॉन की एक श्रृंखला के चारों ओर और उसके माध्यम से उछलते हुए मनके मासिक शेयर बाजार रिटर्न ($R_{j,t+1}$) की अनियमितता को दर्शाते हैं। तीसरी बात,

मनके उन बिनों में आते हैं जो प्राप्त रिटर्न (R_j) को दर्शाते हैं, जो बड़े नमूनों में, बेल कर्व ($f(R_j)$) के समान होते हैं।

अच्छी खबरों और पूर्वानुमानों का और बुरी खबरों और पूर्वानुमानों का एक अनियमित और निरंतर प्रवाह होता रहता है जो किसी भी समय, एक निवेश ($E(\tilde{R}_j)$) के अपेक्षित रिटर्न की अनिश्चितता को दर्शाता है जिसे जोखिम के एक स्थिर स्तर पर रखा जाता है। यदि बुरी खबर के कारण अनिश्चितता बढ़ती है, तो कीमत में आनुपातिक कमी होनी चाहिए ताकि अपेक्षित रिटर्न अनिवार्य रूप से स्थिर रहे।



यदि अच्छी खबर के कारण अनिश्चितता बढ़ती है, तो कीमत में आनुपातिक बढ़त होनी चाहिए ताकि अपेक्षित रिटर्न अनिवार्य रूप से स्थिर रहे।



इस मॉडल को हेबनर मॉडल के नाम से जाना जाता है और इसे बाज़ारों की कार्यप्रणाली में गैल्टन बोर्ड और पास्कल त्रिभुज को शामिल करने के लिए एक ढाँचे के रूप में देखा जाना चाहिए।

पूंजी की लागत

इकोनॉमिक्स और अकाउंटिंग में, पूंजी की लागत किसी कंपनी की निधि (ऋण और इक्विटी दोनों) की लागत होती है, या, एक निवेशक के दृष्टिकोण से, कंपनी की मौजूदा प्रतिभूतियों पर आवश्यक रिटर्न दर है। इसका उपयोग किसी कंपनी की नई परियोजनाओं का मूल्यांकन करने के लिए भी किया जाता है। यह वो न्यूनतम रिटर्न होता है जो निवेशक कंपनी को पूंजी प्रदान करने के लिए अपेक्षा करते हैं, इस प्रकार यह एक मानक निर्धारित करता है जिसे एक नई परियोजना को पूरा करना होता है।

$$WACC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)$$

E फर्म की इक्विटी का बाजार मूल्य है।
V इक्विटी और ऋण का कुल बाजार मूल्य है, या ***E+D***.
Ke इक्विटी की लागत है।
D फर्म के ऋण का बाजार मूल्य है।
Kd ऋण की लागत।
WACC का अर्थ पूंजी की भारित औसत लागत है।
याद दिला दें कि, खरीदार का अपेक्षित रिटर्न विक्रेता ($E(\tilde{R}_{j,t}) = WACC$) के लिए पूँजी की लागत भी है।

निवेश पर रिटर्न का सूत्र

किसी निवेश के वास्तविक रिटर्न/हानि (***R***) का सूत्र है कीमत ($P_{t+1} - P_t$) में परिवर्तन, साथ ही अवधि (**D**) के दौरान निवेशक को दिए गए लाभांश या नकद राशि को निवेश के असली मूल्य (P_t) से विभाजित करना।

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

फामा/फ्रेंच कारक मॉडल
इक्विटी के लिए फामा/फ्रेंच का पांच-कारक मॉडल

इक्विटी के लिए फामा/फ्रेंच पांच-कारक मॉडल एक परिसंपत्ति मूल्य निर्धारण मॉडल है जिसका उद्देश्य औसत स्टॉक रिटर्न में बाज़ार, आकार, मूल्य, लाभप्रदता, और निवेश

पैटर्न को शामिल करना है। इसे वर्ष 2014 में नोबेल पुरस्कार विजेता यूजीन फामा और उनके सह-लेखक और सहयोगी केनेथ फ्रेंच द्वारा विकसित किया गया था। यह मॉडल इक्विटी में पाँच कारकों वाले विविध पोर्टफोलियो के लिए अपेक्षित रिटर्न के क्रॉस-सेक्शन विचरण के 71 प्रतिशत से 94 प्रतिशत के बीच की व्याख्या करता है। यह CAPM (1964) और फामा/फ्रेंच तीन-कारक मॉडल (1993) का विस्तार करता है। फामा/फ्रेंच पांच-कारक मॉडल समीकरण फामा और फ्रेंच द्वारा निर्मित अनुसंधान सूचकांकों की एक श्रृंखला का एक समय श्रृंखला प्रतिगमन है जिसमें विभिन्न कंपनी विशेषताओं के दीर्घकालिक ऐतिहासिक स्टॉक मूल्य शामिल हैं। प्रत्येक कारक (स्वतंत्र वेरिएबल) का गुणांक पोर्टफोलियो में उस कारक के प्रति जोखिम या झुकाव को दर्शाता है। यदि पाँच कारकों, बाज़ार (b_i), आकार (s_i), मूल्य (h_i), लाभप्रदता (r_i), और निवेश (c_i) के प्रति जोखिम, अपेक्षित रिटर्न में सभी भिन्नताओं को दर्शाता है, तो निम्नलिखित समीकरण में अल्फा अवरोधन (a_i) सभी प्रतिभूतियों और पोर्टफोलियो (i) के लिए शून्य होता है।

$$R_{it} – R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt}-R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it}$$

R_{it} अवधि t (आश्रित वेरिएबल) के लिए पोर्टफोलियो i पर रिटर्न है।

R_{Ft} जोखिम-मुक्त रिटर्न है।

$R_{Mt}-R_{Ft}$ वह रिटर्न अंतर है जो पूंजीकरण-भारित स्टॉक बाज़ार और नकदी के बीच होता है।

SMB_t छोटे शेयरों के विविधीकृत पोर्टफोलियो पर रिटर्न में से बड़े शेयरों के विविधीकृत पोर्टफोलियो पर रिटर्न घटाकर प्राप्त किया गया रिटर्न है (अर्थात, आकार का प्रभाव)।

HML_t उच्च और निम्न BtM स्टॉक के विविध पोर्टफोलियो पर रिटर्न के बीच का अंतर है (अर्थात, मूल्य का प्रभाव)।

RMW_t मजबूत और कमजोर लाभप्रदता वाले शेयरों के विविध पोर्टफोलियो पर रिटर्न के बीच का अंतर है।

CMA_t कम और उच्च निवेश वाली फर्मों के शेयरों के विविध पोर्टफोलियो पर रिटर्न के बीच का अंतर है, जिसे फामा/फ्रेंच रूढ़िवादी और आक्रामक कहते हैं।

e_{it} त्रुटि पद है और यह शून्य-माध्य अवशिष्ट है।

स्रोत: फामा, यूजीन एफ. और फ्रेंच, केनेथ आर., *A Five-Factor Asset Pricing Model* (सितंबर 2014)।

गैल्टन बोर्ड के लिए मेरा आकर्षण

मार्क टी. हेबनर

मेरा नाम मार्क टी. हेबनर है, और मैं इंडेक्स फंड एडवाइजर्स, इंक. (IFA.com) का CEO और संस्थापक हूँ। मेरी फर्म वेल्थ मैनेजमेंट और टैक्स की तैयारी के बिज़नेस में है। मैंने कई सार आधुनिक गैल्टन बोर्ड का निर्माण भी किया है।

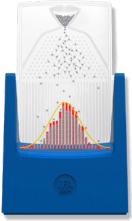
किसी निवेश के जोखिम और रिटर्न के बार में बताने का सबसे आम तरीका ऐतिहासिक रिटर्नों के एक बड़े सैंपल से उसके औसत रिटर्न और रिटर्न के मानक विचलन का अनुमान लगाना है, जो कि लगभग 1,000 महीनों के सूचकांक डेटा जैसा होता है। यदि आप Excel में बेल कर्व बनाना चाहते हैं, तो केवल औसत और मानक विचलन की आवश्यकता होती है। इनसे बेल कर्व को परिभाषित किया जाता है। जैसे की यह पता चला कि हैरी मार्कोविट्ज़ का नोबेल पुरस्कार विजेता स्कैटर प्लॉट जो औसत रिटर्न और मानक विचलन के बीच के संबंध को दर्शाता है वह वास्तव में बेल कर्वों की तुलना मात्र था। इसलिए ज़रा सोचिए जब मुझे एक ऐसा असली डिवाइस मिला जो बेल कर्व उत्पन्न करता है तो मुझे कितनी खुशी हुई होगी। मुझे एहसास हुआ कि कि बाजार कैसे काम करता है इसको दिखाने का यह एक प्रभावशाली तरीका है और अलग-अलग नतीजों की संभावनाएं कैसी होती हैं। मेर मन में यह भी विचार आया कि गैल्टन बोर्ड मासिक निवेश रिटर्न का अनुकरण करता है और इससे लोग यह देख सकते हैं कि लगातार अपेक्षित रिटर्न क्या हैं, तीस दिनों की अवधि में रिटर्न की अनियमितता कैसी होती है, और लंबे समय में मिले रिटर्न का बेल कर्व कैसे बनता है। संक्षेप में कहें तो यह डिवाइस निवेशकों को महत्वपूर्ण निवेश अवधारणाओं को समझने में सहायता करता है।

गैल्टन बोर्ड के लिए मेरी दिलचस्पी वर्ष 2005 में तब जागृत हुई जब मैंने 1964 वर्ल्ड फ़ेयर पर आधारित ईम्स ऑफिस की एक फ़िल्म देखी। चार्ल्स ईम्स ने IBM की प्रदर्शनी के लिए बाहर साढ़े चौदह फुट का ऊँचा गैल्टन बोर्ड बनाया, जो उनके पहले बनाए गए *Mathematica* मॉडल पर आधारित था: *संख्याओं की एक दुनिया... और उससे से भी पर।* *Mathematica* ईम्स ऑफिस द्वारा निर्मित और IBM द्वारा प्रायोजित पहली पूरी तरह अनुभव देने वाली और बड़े पैमाने की प्रदर्शनी थी। यह 1961 में लॉस एंजेलिस

स्थित कैलिफ़ोर्निया म्यूज़ियम ऑफ़ साइंस एंड इंडस्ट्री के नए विज्ञान विंग के उद्घाटन हेतु डिज़ाइन की गई थी।

मेरी पहली गैल्टन बोर्ड, जिसकी तस्वीर यहाँ प्रदर्शित है, ओरेगन म्यूज़ियम ऑफ़ साइंस एंड इंडस्ट्री द्वारा डिज़ाइन और निर्मित की गई थी। मैंने यह तस्वीर एक आठ फुट ऊँचे और चार फुट चौड़े संग्रहालय-स्तरीय प्रायिकता प्रदर्शक को दर्शाती है जो 2009 में निवेशकों को अनियमित घटनाओं की एक श्रृंखला से उत्पन्न होने वाले परिणामों की सीमा, संभावना, और आकार के बारे में समझाने के लिए लगाई गई थी। यह गैल्टन बोर्ड इंडेक्स फंड एडवाइजर्स के कार्यालय की लॉबी में स्थित है और वॉल स्ट्रीट की अनियमित चाल के बीच व्यवस्था को दर्शाने में सहायक है। मनकों के पीछे लगी लाल पट्टियाँ एक सैद्धांतिक निवेश पोर्टफोलियो के मासिक रिटर्नों के बड़े सैंपल को दर्शाती हैं, जिससे मनकों की तुलना वास्तविक स्टॉक मार्केट से की जा सकती है। शेयर बाज़ार में, अनियमित घटनाएँ किसी कंपनी के बारे में या सामान्यतः पूंजीवाद के बारे में और प्रतिभूतियों की कीमतें होती हैं जो इस जानकारी को दर्शाती हैं। मनकों का अनियमित प्रवाह, एक केंद्रीय बिंदु से शुरू होकर, उचित मूल्यों की एक श्रृंखला का अनुकरण करता है, जो आखिर में एक बेल कर्व के आकार में मासिक रिटर्न का एक सामान्य वितरण बनाता है।

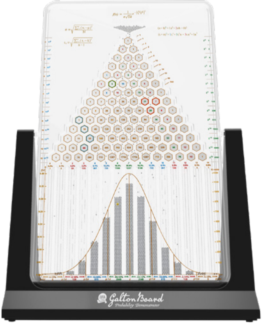
IFA की लॉबी में 8 फुट का गैल्टन बोर्ड


The Random Walker®

फिलिप पोइसांट, जेरी जू, आर्ट फोर्स्टर, जैक्सन लिन, माइक ऑचटरलोनी, ब्रूनसन परिवार और अन्य लोगों की मदद से, मैंने 2015 में अपना पहला साढ़े सात इंच ऊँचा डेस्कटॉप आकार का गैल्टन बोर्ड बनाया, जिसे The Random

Walker® (अमेरिकी पेटेंट #D784,449) कहा जाता है। गैल्टन बोर्ड का यह छोटा संस्करण न केवल सांख्यिकीय अवधारणाओं और स्टॉक मार्केट की अनियमितता को समझने में मददगार है, बल्कि यह खेलने के लिए एक दिलचस्प डेस्कटॉप डिवाइस भी है। नए जमाने के एक फ्लिप-एन-रीसेट डिज़ाइन के साथ, कोई भी अपनी उंगली के एक इशारे से अव्यवस्था में व्यवस्था का अनुभव आसानी से कर सकता है। इनमें से लगभग 60,000 बोर्ड दुनिया भर में डेस्क पर मौजूद हैं।

वर्ष 2024 में, हमने गैल्टन बोर्ड का एक नया संस्करण बनाया जो साइज में बड़ा है, जिससे अन्य लोगों को बेहतर प्रदर्शन करने का अवसर मिलेगा। हमने इसे 12” x 8.5” साइज का बनाया और इसका नाम गैल्टन बोर्ड रखा: प्रायिकता प्रदर्शक (अमेरिकी पेटेंट #12,268,971 B1)। इस मॉडल में दो स्टॉक मार्केट क्लिप-ऑन और 19 पेज की विस्तृत एवं समझाने वाली उपयोगकर्ता मार्गदर्शिका भी दी गई है।

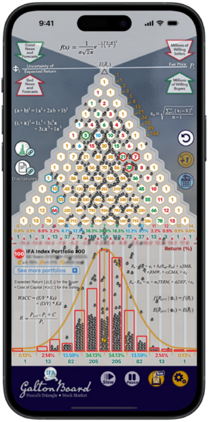


गैल्टन बोर्ड: प्रायिकता प्रदर्शक

पिछले संस्करण की तुलना में डेस्क-टॉप साइज के इस बोर्ड के संस्करण के डिज़ाइन में कई नए सुधार शामिल किए गए हैं। यह द्विपद वितरण और पास्कल त्रिभुज की अवधारणाओं को अधिक सटीक रूप से दर्शाता है, साथ ही इसमें शामिल कई अन्य गणितीय अवधारणाओं को भी उजागर करता है मासिक रिटर्न डेटा के क्लिप-ऑन जोड़कर, कोई स्टॉक मार्केट के तत्वों, जैसे कि हेब्नर मॉडल, को शामिल होते हुए देख सकता है और यह भी समझ सकता है कि ये मनकों का बेल कर्व से कितनी अच्छे से मेल खाते हैं।

यह नया सिंपल गैल्टन बोर्ड एक किफायती और कॉम्पैक्ट डिज़ाइन प्रदान करता है, जो आपकी शर्ट की जेब में भी आ सकता है।

गैल्टन बोर्ड और पास्कल त्रिभुज में निहित सिद्धांतों को समझाने और बढ़ावा देने के लिए, मैंने 2023 में गैल्टन बोर्ड का एक ऐप संस्करण तैयार करवाया। ऐप का यह संस्करण जाइरोमीटर का उपयोग करता है जिससे आप फ़ोन या iPad को घुमा सकते हैं और मनकों के प्रवाह को सुन और देख सकते हैं जैसे कि वे आपके डिवाइस में घूमते हुए असली मनके हों। सेटिंग आइकन पर टैप करके, आप बीस इंडेक्स पोर्टफोलियो हिस्टोग्राम भी ओवरले कर सकते हैं और जोखिम में बदलाव के साथ बिंस के रिटर्न स्केल में बदलाव देख सकते हैं। iPhone और iPad पर ऐप पाने के लिए, Apple App Store पर जाएं और "Index Fund Advisors" खोजें। फिर इंटरक्टिव बोर्ड तक पहुँचने के लिए ऐप में गैल्टन बोर्ड का आइकन देखें। आप अपने Mac लैपटॉप या डेस्कटॉप पर Mac App Store पर भी जा सकते हैं और गैल्टन बोर्ड का ऐप खोज सकते हैं। अंत में, एंड्रॉइड डिवाइस के लिए Google Play Store पर जाएं और “Index Fund Advisors” खोजें।



गैल्टन बोर्ड: ऐप संस्करण

ऐप प्राप्त करें

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

इंडेक्स फंड एडवाइजर्स के बारे में

Index Fund Advisors
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

अटकलों को जानकारी से बदलना

इंडेक्स फंड एडवाइजर्स, इंक. (IFA) केवल शुल्क पर कार्य करने वाली एडवाइजरी और वेल्थ मैनेजमेंट फर्म है जो जोखिम-उपयुक्त, वैश्विक रूप से विविध और टैक्स-प्रबंधित निवेश की रणनीतियाँ प्रदान करती है, जिसमें क्लाइंट के हित को सर्वोपरि मानने वाला मानक भी शामिल है।

IFA एक पंजीकृत निवेश सलाहकार है, जो लोगों, रिटायरमेंट प्लान, ट्रस्ट, कंपनियों, गैर-लाभकारी संस्थाओं और सार्वजनिक तथा निजी संस्थानों को निवेश संबंधी सलाह प्रदान करता है। IFA की स्थापना वर्ष 1999 में हुई थी, और इसने 2024 में अपनी 25वीं वर्षगांठ मनाई। IFA पूरे अमेरिका में ग्राहकों को निवेश संबंधी सलाह प्रदान करता है।

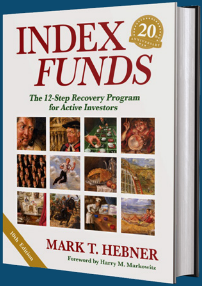
IFA का महत्व निवेश संबंधी सलाह से कहीं आगे तक व्यापक है। एक समग्र वित्तीय भागीदार के रूप में, IFA धन प्रबंधन और वित्तीय नियोजन के साथ-साथ निवेश सलाह भी प्रदान करता है ताकि ग्राहकों को उनकी वित्तीय यात्रा के प्रबंधन में सहायता मिल सके। हमारे वेल्थ एडवाइज़र्स हर एक व्यक्ति की आवश्यकताओं के अनुसार पोर्टफोलियो का मिलान करते हैं, और साथ ही समग्र एवं विचारशील ग्राहक अनुभव हेतु वेल्थ मैनेजमेंट सेवाओं की पूरी श्रृंखला और फाइनेंशियल प्लानिंग प्रदान करते हैं।

IFA का उद्देश्य उन गतिविधियों से बचना है जो अक्सर स्टॉक, समय, मैनेजर और स्टाइल चुनने से अनावश्यक खर्च बढ़ा देती हैं। इसके बजाय, IFA एक अनुशासित और आंकड़ों पर आधारित तरीका अपनाता है, जो पोर्टफोलियो को विविध बनाने के साथ-साथ लागत को भी कम रखता है।

IFA में यूजीन फामा और केनेथ फ्रेंच के काम पर आधारित शोध और सूचकांक शामिल हैं, जो दशकों के ऐतिहासिक जोखिम और रिटर्न डेटा, तीसरी पीढ़ी के इंडेक्स

फंड डिज़ाइन और डायमेंशनल फंड एडवाइजर्स द्वारा विकसित परिष्कृत निष्क्रिय ट्रेडिंग तकनीकों का लाभ उठाते हैं।

IFA अपने ग्राहकों की परिस्थितियों और लक्ष्यों के अनुरूप निवेश प्रबंधन एवं पोर्टफोलियो रणनीतियाँ प्रदान करता है, साथ ही टैक्स प्लानिंग और अकाउंटिंग, ऑनलाइन फाइनेंशियल प्लानिंग तथा रेफ़रल सेवाएँ भी उपलब्ध कराता है, ताकि प्रत्येक ग्राहक को विचारपूर्ण और व्यक्तिगत अनुभव प्राप्त हो सके। एक अनुभवी IFA वेल्थ एडवाइज़र व्यक्तिगत सलाह देता है, जिसे ग्राहकों को उनके दीर्घकालिक वित्तीय लक्ष्यों को प्राप्त करने में मदद करने के लिए तैयार किया गया है।



मार्क टी. हेबनर Index Fund Advisors, Inc. (IFA) के संस्थापक और CEO हैं, और बहुचर्चित किताब *Index Funds* के लेखक हैं: *सक्रिय निवेशकों के लिए 12-चरणीय रिकवरी प्रोग्राम*, जो निवेशक की जानकारी बढ़ाने पर केंद्रित है।

IFA आपके वित्तीय लक्ष्यों में कैसे मदद कर सकता है, इस बारे में अधिक जानने के लिए ifa.com पर जाएं या हमें कॉल करें।

www.ifa.com

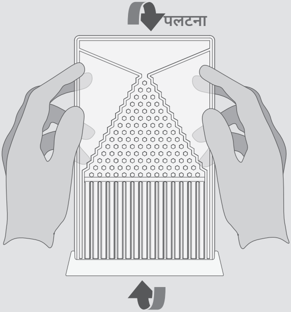
Index Fund Advisors, Inc.
19200 Von Karman Ave.
Suite 150
Irvine, CA 92612
888-643-3133
ifa.com | info@ifa.com

गैल्टन बोर्ड के लिए निर्देश

1. गैल्टन बोर्ड को तब तक पलटें जब तक कि सभी मनके भंडार कक्ष में न गिर जाएं।

2. बोर्ड को पलट दें और उसे समतल सतह पर तब तक रखें जब तक कि सभी मनके बिन में न आ जाएं।

3. बड़े स्वर्णिम मनके को देखें और सभी मनकों के वितरण को गौर से देखें।



असली गैल्टन बोर्ड से निर्देश, जिसे 1873 में टिस्ले और स्पिलर द्वारा फ्रांसिस गैल्टन के लिए बनाया गया था। बोर्ड पर गैल्टन की हस्तलिपि में लिखा गया कैप्शन इस प्रकार है:

त्रुटि या फैलाव के नियम के सिद्धांत
को दर्शाने वाला यंत्र
फ्रांसिस गैल्टन, रॉयल सोसाइटी के सदस्य के द्वारा

इस यंत्र को उल्टा करके चार्ज करें, ताकि सारे शॉट पॉकेट में चले जाएं। फिर तेजी से फिर से उल्टा करें और तुरत समतल मेज पर इसे सीधा खड़ा कर दें। सभी शॉट तब फनल में गिरने लगेंगे और उसके मुहाने से गुजरते हुए वे टेढ़े-मेढ़े रास्तों से होते हुए नीचे की ओर बढ़ेंगे और सीधे खड़े कक्ष में इकट्ठे हो जाएंगे जहाँ वो फैलाव के नियम को दर्शाएंगे।

■ **अतिरिक्त जानकारी, वीडियो, लेख, फ़ोटो, सोशल मीडिया आदि के लिए ifa.com/galtonboard पर जाएं।**