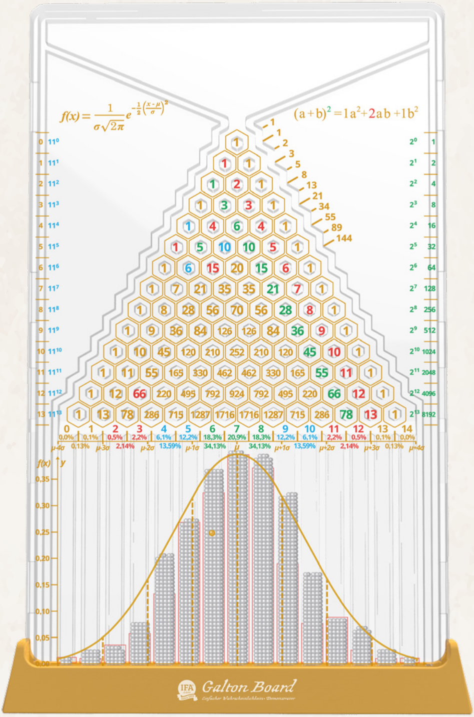
IFA® .com Since 1999

Galton Board

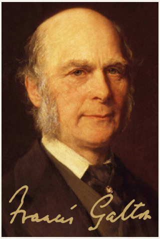
Einfacher Wahrscheinlichkeits-Demonstrator



BENUTZERHANDBUCH

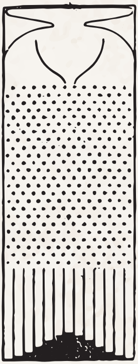
Das Galton-Brett

Das Galton-Brett (Simple Edition) mit Pascals Dreieck ist ein 150 mm × 95 mm großer Wahrscheinlichkeitsdemonstrator, der eine Visualisierung von Mathematik in Bewegung sowie der Kräfte von Wahrscheinlichkeiten und Statistik bietet. Auf der Rückseite des Brettes ist ein theoretisches Histogramm eines Investmentportfolios aufgedruckt, das die Zufälligkeit und die Wahrscheinlichkeiten von Marktrenditen veranschaulicht.



Sir Francis Galton

Das Galton-Brett zeigt jahrhundertealte mathematische Konzepte in einem innovativen, dynamischen Desktop-Gerät. Es integriert Sir Francis Galtons (1822–1911) Erfindung aus dem Jahr 1873, die die Binomialverteilung darstellte, welche sich — bei einer großen Anzahl von Reihen von Sechsecken und einer großen Anzahl von Kugeln - der Normalverteilung annähert, ein Konzept, das als Zentraler Grenzwertsatz bekannt ist. Er war fasziniert von der Ordnung der Glockenkurve, die aus dem scheinbaren Chaos der Kugeln entsteht, welche in seinem Brett von Stiften abprallen. Gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz, genauer gesagt dem Satz von de Moivre (1667–1754) – Laplace (1749–1827), kann die Normalverteilung unter bestimmten Bedingungen als Näherung der Binomialverteilung verwendet werden.



Galtons Originalzeichnung

Wenn das Galton-Brett auf den Kopf gestellt wird, fließen die Kugeln in das obere Reservoir. Wird es wieder umgedreht und auf einer waagerechten Oberfläche gehalten, stürzen die 4.280 Stahlkugeln und eine große goldene Kugel aus dem Reservoir durch 14 Reihen symmetrisch angeordneter Hexagone im Galton-Brett. Wenn das Gerät waagerecht steht, prallen die Kugeln von den 105 Hexagonen ab, wobei sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder nach rechts abgelenkt werden. Wenn sich die Kugeln in einem der 15 Kasten am unteren Rand des Brettes absetzen, häufen sie sich zu einem glockenförmigen Histogramm. Das Umdrehen des Galton-Bretts ist wie das Werfen von 59.920 Münzen in etwa 2 Sekunden. Eine Kugel, die vierzehn „Kopf"-Ergebnisse in Folge repräsentiert, würde im Kasten Nr. 14 landen, und eine Kugel, die kein „Kopf" (also vierzehnmal „Zahl") repräsentiert, würde im Kasten Nr. 0 landen.

Auf der Oberseite des Brettes sind Formeln für die Normalverteilung und die binomische Entwicklung aufgedruckt. Auf dem unteren Teil des Brettes ist die Normalverteilung, also die Glockenkurve, sowie die Durchschnitts- und Standardabweichungslinien relativ zu dieser Verteilung aufgedruckt. Die Glockenkurve, auch bekannt als Gaußsche Verteilung (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), ist in der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie von großer Bedeutung. Sie wird in den Natur- und Sozialwissenschaften verwendet, um Zufallsvariablen darzustellen, wie die Kugeln im Galton-Brett oder die monatlichen Renditen des Aktienmarktes. Sie können auch die Beschriftungen der Y-Achse und X-Achse sowie nummerierte Kästen mit erwarteten Prozentsätzen und Kugelzahlen sehen.

Blaise Pascal

Über den Hexagonen liegt Pascals Dreieck (Blaise Pascal, 1623–1662), ein Zahlendreieck, das der Regel folgt, die beiden darüberliegenden Zahlen zu addieren, um die darunterliegende Zahl zu erhalten. Die Zahl an jedem Hexagon gibt die Anzahl der verschiedenen Wege an, die eine Kugel vom oberen Hexagon zu diesem Hexagon zurücklegen könnte. Sie zeigt auch die Fibonacci-Zahlen (Leonardo Fibonacci, 1175–1250), die die Summen bestimmter Diagonalen in Pascals Dreieck sind. Innerhalb von Pascals Dreieck sind mathematische

Eigenschaften und Muster zahlreich. Dazu gehören: natürliche Zahlen, Zeilensummen, Potenzen von 11, Potenzen von 2, figurierte Zahlen, der Stern-David-Satz und das Hockey-Stick-Muster. Weitere Muster in Pascals Dreieck, die auf diesem Brett nicht dargestellt sind, umfassen Primzahlen; Quadratzahlen; Binärzahlen; Catalan-Zahlen; binomische Entwicklung; Fraktale; den Goldenen Schnitt; und das Sierpinski-Dreieck.

Unter den 4.280 Stahlkugeln befindet sich eine größere goldene Kugel, die ein einzelnes zufälliges Ergebnis demonstriert. Über jedem Kasten sind die prozentualen Schätzungen der Wahrscheinlichkeit angegeben, dass eine Kugel in diesem Kasten landet. Indem Sie die goldene Kugel verfolgen, können Sie diese Wahrscheinlichkeiten bei jedem Umdrehen des Galton-Bretts deutlich beobachten. Mit dem roten Investmentportfolio-Histogramm auf der Rückseite kann die goldene Kugel den wahrscheinlichen Bereich und die Wahrscheinlichkeiten der Aktienmarktrendite des nächsten Monats darstellen. Die Wahrscheinlichkeiten des Galton-Bretts dafür, in welchen Kasten die goldene Kugel fallen wird, dienen als Ersatz für die Vorhersagen von Aktienmarktprognostikern.

In dieses Galton-Brett sind viele statistische und mathematische Konzepte eingebettet, darunter Wahrscheinlichkeitstheorien, unabhängig und identisch verteilte (iid) Zufallsvariablen, die Normal- oder Glockenkurve, der Zentrale Grenzwertsatz (der de-Moivre-Laplace-Satz), die Binomialverteilung, Bernoulli-Versuche (1655–1705), Regression zum Mittelwert, das Gesetz der großen Zahlen, Wahrscheinlichkeiten wie Münzwürfe und Aktienmarktrenditen, der Random Walk, der Spielerfehlschluss, das Gesetz der Fehlerhäufigkeit sowie das, was Sir Francis Galton als das „Gesetz der Unvernunft“ bezeichnete.

In Galtons Worten

In seinem Buch Natural Inheritance (1889) beschrieb Sir Francis Galton anschaulich das Gerät, das er erschaffen hatte, um die Ordnung im scheinbaren Chaos sichtbar zu machen. Das Folgende ist ein modifizierter Auszug aus diesem 136 Jahre alten Buch. Der Text wurde leicht aktualisiert, um der Terminologie zu entsprechen, die zur Beschreibung unseres Galton-Bretts verwendet wird.

Die Reize der Statistik

„Es ist schwer zu verstehen, warum Statistiker ihre Untersuchungen gewöhnlich auf Durchschnitte beschränken und sich nicht an umfassenderen Betrachtungen erfreuen. Ihre Seelen scheinen gegenüber dem Reiz der Vielfalt ebenso stumpf zu sein wie die eines Einwohners einer unserer flachen englischen Grafschaften, dessen Rückblick auf die Schweiz lautete, dass, wenn man ihre Berge in ihre Seen werfen könnte, man zwei Plagen auf einmal los wäre. Ein Durchschnitt ist nur eine einzelne Tatsache; doch wenn man eine weitere Tatsache hinzufügt, entsteht potenziell ein gesamtes Normalschema, das dem beobachteten nahezu entspricht."

„Manche Menschen verabscheuen schon den Namen Statistik, aber ich finde sie voller Schönheit und Interesse. Wann immer sie nicht verroht, sondern durch höhere Methoden feinfühlig behandelt und vorsichtig interpretiert werden, ist ihre Fähigkeit, mit komplizierten Phänomenen umzugehen, außergewöhnlich. Sie sind die einzigen Werkzeuge, mit denen ein Durchgang durch das gewaltige Dickicht von Schwierigkeiten geschaffen werden kann, das den Weg derjenigen versperrt, die die Wissenschaft vom Menschen verfolgen."

Mechanische Veranschaulichung der Ursache der Häufigkeitskurve

„Die Häufigkeitskurve und die Verteilungskurve sind ineinander überführbar; daher wird, wenn die Entstehung der einen klar dargestellt werden kann, auch die der anderen verständlich. Ich werde nun den Ursprung der Häufigkeitskurve mithilfe eines Apparates (hier dargestellt) veranschaulichen, der auf sehr hübsche Weise die Bedingungen nachahmt, von denen die Abweichung abhängt."

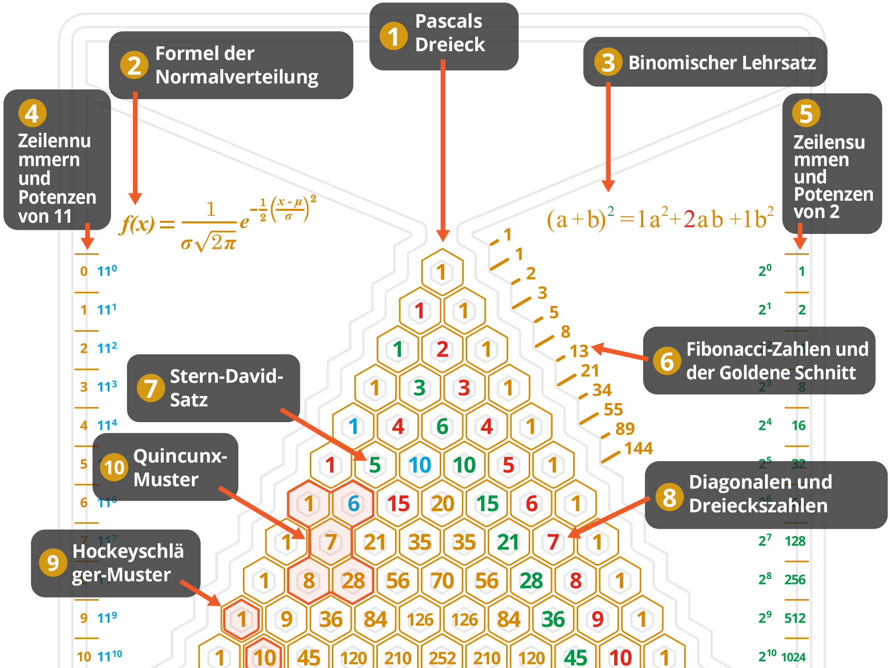
Unser Design des Galton-Bretts besteht aus einem antistatischen Kunststoffrahmen. Am oberen Ende des Brettes ist ein Kugelreservoir integriert. Unterhalb der Öffnung des Trichters befindet sich eine Abfolge von 14 Reihen von Hexagonen, ähnlich Galtons Stiften, die gerade in die Rückseite des Brettes eingesetzt sind, und darunter wiederum eine Reihe von 15 Kästen bzw. vertikalen Fächern. Eine Ladung von 4.280 Stahlkugeln ist im Brett eingeschlossen. Wenn das Brett „auf den Kopf gestellt" wird, laufen alle Kugeln zum oberen Ende in das Reservoir; wenn es dann wieder in seine Arbeitsposition zurückgedreht wird, beginnt der gewünschte Ablauf. Die Ränder des Reservoirs haben die Wirkung, alle Kugeln, die sich am oberen Ende des Rahmens gesammelt haben, in die Öffnung des Trichters zu leiten.

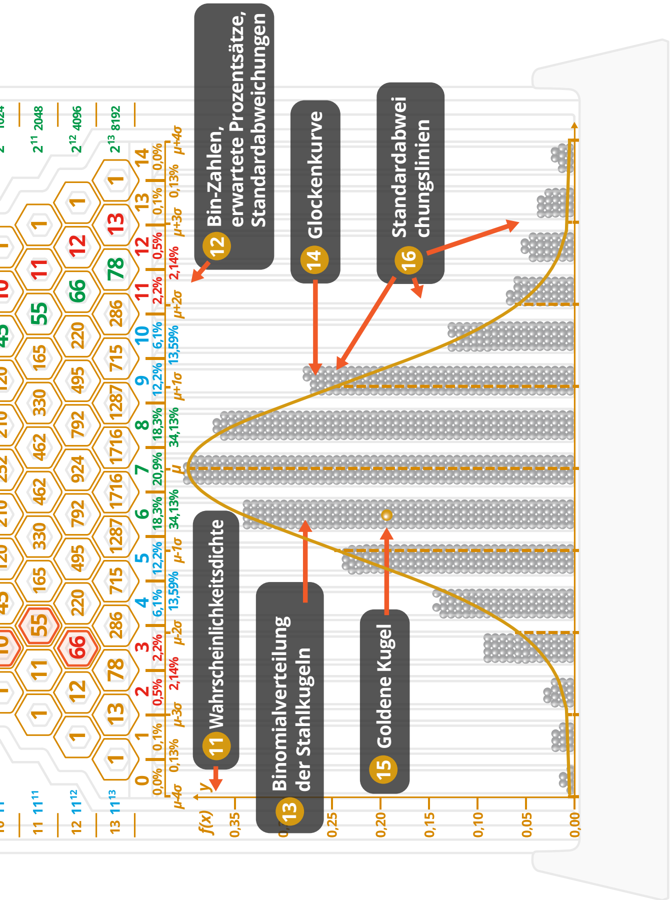
„Die Kugeln passieren den Trichter und huschen auf merkwürdige und interessante Weise durch die Stifte [Hexagone] nach unten; jede von ihnen macht bei jedem Auftreffen auf einen Stift einen Schritt nach rechts oder links, je nachdem. Die Stifte sind in einer Quincunx-Anordnung angebracht, sodass jede herabfallende Kugel in jeder aufeinanderfolgenden Reihe auf einen Stift trifft. Der aus dem Trichter austretende Kaskadenstrom verbreitert sich beim Herabfallen, und schließlich findet sich jede Kugel unmittelbar nach dem Verlassen der letzten Reihe von Stiften in einem Kasten gefangen. Die Kontur der Verteilung der Kugeln, die sich in den Kästen ansammeln, nähert sich der Häufigkeitskurve an und hat nahezu stets dieselbe Form, wie oft das Experiment auch wiederholt wird."

„Das Prinzip, von dem die Funktionsweise des Apparates abhängt, ist, dass eine Reihe kleiner und unabhängiger Zufälle jede Kugel auf ihrem Weg trifft.“ In seltenen Fällen begünstigt eine lange Glücksserie weiterhin den Weg einer bestimmten Kugel zu einem der äußeren Kästen, doch in der großen Mehrzahl der Fälle gleichen sich die Zufälle, die eine Abweichung nach rechts verursachen, in größerem oder geringerem Maße mit denen aus, die eine Abweichung nach links verursachen. Daher finden die meisten Kugeln ihren Weg in die Kästen, die sich nahe einer Senkrechten befinden, die von der Öffnung des Trichters abwärts gezogen wird, und die Häufigkeit, mit der Kugeln in verschiedene Entfernungen rechts oder links von dieser Linie abweichen, nimmt in einem viel schnelleren Verhältnis ab, als diese Entfernungen zunehmen.“

Ordnung im scheinbaren Chaos

„Ich kenne kaum etwas, das die Vorstellungskraft so sehr zu beeindrucken vermag wie die wunderbare Form kosmischer Ordnung, die durch das ‚Gesetz der Fehlerhäufigkeit‘ zum Ausdruck kommt. Die Griechen hätten dieses Gesetz personifiziert und vergöttert, wenn sie davon gewusst hätten. Es herrscht mit Gelassenheit und vollkommener Selbstzurücknahme inmitten der wildesten Verwirrung. Je größer die Menge und je größer die scheinbare Anarchie, desto vollkommener ist seine Herrschaft. Es ist das oberste Gesetz der Unvernunft. Immer wenn eine große Menge chaotischer Elemente in die Hand genommen und nach ihrer Größenordnung geordnet wird, erweist sich eine unerwartete und äußerst schöne Form von Regelmäßigkeit als die ganze Zeit über latent vorhanden. Die Oberkanten der geordneten Kästen bilden eine fließende Kurve unveränderlicher Proportionen; und jedes Element findet, sobald es an seinen Platz sortiert wird, gleichsam eine vorbestimmte Nische, die genau auf es zugeschnitten ist. Wenn die Messwerte an zwei bestimmten Graden im Kasten bekannt sind, können jene, die sich bei jedem anderen Grad finden werden — außer an den äußersten Enden — auf die bereits erklärte Weise und mit großer Genauigkeit vorhergesagt werden.“


1 Pascals Dreieck
2 Formel der Normalverteilung
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
3 Binomischer Lehrsatz
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
4 Zeilennummern und Potenzen von 11
0 11^0
1 11^1
2 11^2
3 11^3
4 11^4
5
6
9 11^9
10 11^{10}
5 Zeilensummen und Potenzen von 2
2^0 1
2^1 2
2^4 16
2^7 128
2^8 256
2^9 512
2^{10} 1024
6 Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144
7 Stern-David-Satz
8 Diagonalen und Dreieckszahlen
9 Hockeyschläger-Muster
10 Quincunx-Muster
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1


12 Bin-Zahlen, erwartete Prozentsätze, Standardabweichungen
14 Glockenkurve
16 Standardabwei chungslinien
11 Wahrscheinlichkeitsdichte
13 Binomialverteilung der Stahlkugeln
15 Goldene Kugel

MERKMALE DES GALTON-BRETTS

1 Pascals Dreieck

Pascals Dreieck ist ein Zahlendreieck, das der Regel folgt, die beiden darüberliegenden Zahlen zu addieren, um die darunterliegende Zahl zu erhalten. Dieses Muster kann sich endlos fortsetzen. Blaise Pascal nutzte das Dreieck zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie in seiner mathematischen Abhandlung *Traité du triangle arithmétique* (1665) beschrieben. Andere Mathematiker untersuchten es bereits Jahrhunderte vor ihm in Persien, Indien, China, Deutschland und Italien. Die Muster des Dreiecks entsprechen den mathematischen Eigenschaften der Binomialkoeffizienten. Wenn es auf das Galton-Brett gelegt wird, gibt jede Zahl auf einem Hexagon die Anzahl der Wege an, die eine Kugel nehmen kann, um dieses Hexagon zu erreichen.

2 Formel der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine Normalverteilung eine Art kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine reellwertige Zufallsvariable. Hier ist die allgemeine Form ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ dargestellt. Normalverteilungen sind in der Statistik wichtig und werden in den Natur- und Sozialwissenschaften häufig verwendet, um reellwertige Zufallsvariablen darzustellen, deren Verteilungen nicht bekannt sin In der Formel ist die Konstante Pi enthalten (**π ≈ 3,142**), das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser. Ebenfalls enthalten ist Eulers Zahl (**e ≈ 2.718**), die

Basis des natürlichen Logarithmus. Der iid-Zentralgrenzwertsatz besagt, dass die Zufallsvariable x normalverteilt sein wird, wenn der Stichprobenumfang groß wird und Sigma (σ) endlich ist.

3 Binomischer Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz beschreibt die algebraische Erweiterung von Potenzen eines Binoms. Pascals Dreieck definiert die Koeffizienten, die in binomischen Erweiterungen erscheinen. Das bedeutet, dass die $\mathbf{n}^{\text{-te}}$ Zeile von Pascals Dreieck die Koeffizienten des erweiterten Ausdrucks des Polynoms $(\mathbf{a+b})^{\mathbf{n}}$ umfasst. Für das Galton-Brett sind die Binome links und rechts $(\mathbf{L+R})^{\mathbf{n}}$.

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(L+R)^3 = 1L^3 + 3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

Die Erweiterung von $(\mathbf{a+b})^{\mathbf{n}}$ lautet $(\mathbf{a+b})^{\mathbf{n}} = x_0a^n + x_1a^{n-1}b + x_2a^{n-2}b^2 + \ldots + x_{n-1}ab^{n-1} + x_nb^n$, wobei die Koeffizienten der Form $\mathbf{x_k}$ genau die Zahlen sind, die im $\mathbf{k}^{\text{-ten}}$ Eintrag der $\mathbf{n}^{\text{-ten}}$ Zeile von Pascals Dreieck erscheinen (die Zählung von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{n}$ beginnt bei 0). Dies kann ausgedrückt werden als: $x_k = \binom{n}{k}$, d. h. „$\mathbf{n}$ über $\mathbf{k}$." Das erste Hexagon auf dem Galton-Brett ist $\binom{0}{0}$, gefolgt darunter von $\binom{1}{0}$ und $\binom{1}{1}$.

Beispiele binomischer Ausdrücke sind auf dem Brett für $(\mathbf{a+b})^{\mathbf{n}}$ bei $\mathbf{n = 2}$ und für $(\mathbf{L+R})^{\mathbf{n}}$ bei $\mathbf{n = 3}$ dargestellt.

4 Zeilennummern und Potenz von 11

Auf der linken Seite sind die vierzehn Zeilen von Pascals Dreieck nummeriert, wobei die erste Zeile als n=0 und der erste Eintrag jeder Zeile als k=0 bezeichnet ist. Vierzehn Zeilen sind ausreichend groß, sodass die entstehende Binomialverteilung eine gute diskrete Annäherung an die kontinuierliche Normalverteilung darstellt.

Wenn Sie jede Zeile zu einer einzigen Zahl zusammenfassen, indem Sie jedes Element als Ziffer nehmen (und nach links übertragen, falls das Element mehr als eine Ziffer hat), erhalten Sie die Potenz von elf ($\mathbf{11^n}$): 1, 11, 121, 1331, 14641 ... was den Zahlen in der entsprechenden Zeile von Pascals Dreieck entspricht.

5 Zeilensummen und Potenz von 2

Die Summe der Zahlen in einer Zeile entspricht $\mathbf{2^n}$, wobei n der Zeilennummer entspricht. Zum Beispiel ergibt in Zeile drei die Summe der Pascal-Zahlen 1 + 3 + 3 + 1 = 8, was ebenfalls 2^3 entspricht.

Die Summe der Zahlen in jeder Zeile wird ebenfalls neben der Zweierpotenz angegeben, und jede Gesamtsumme verdoppelt sich in den folgenden Zeilen. Außerdem entspricht die Summe der Quadrate der Einträge einer Zeile dem mittleren Eintrag dieser Zeile mal zwei. Zum Beispiel ergibt die Summe der Quadrate der Einträge in Zeile vier ($1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$) siebzig, was auch dem mittleren Eintrag der Zeile acht entspricht.

6 Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Die Summe der Zahlen auf der gezeigten Diagonalen in Pascals Dreieck entspricht den Fibonacci-Zahlen. Die Folge verläuft in dieser Reihenfolge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 und so weiter. Jede Zahl der Folge ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen. Zum Beispiel: 2+3=5; 3+5=8; 5+8=13; 8+13=21 ... Leonardo Fibonacci popularisierte diese Zahlen in seinem Buch *Liber Abaci* (1202). Wenn man die Fibonacci-Zahlen weiterführt, nähern sich die Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dem Goldenen Schnitt (φ) von 1,61803398 ... an, erreichen ihn jedoch nie. Zum Beispiel: 55/34=1.618; 89/55=1.618; und 144/89=1.618. Der Goldene Schnitt wurde erstmals von Euklid in seinem Buch *Elements* definiert, das 300 v. Chr. verfasst wurde. Leonardo da Vinci nutzte dieses Verhältnis zur Konstruktion seiner Meisterwerke. Die Gleichung für den Goldenen Schnitt lautet:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 Stern-David-Satz

Der Stern-David-Satz besagt, dass die beiden Gruppen von jeweils drei Zahlen, die eine Zahl umgeben, gleiche Produkte haben. Im gezeigten Beispiel ist die Zahl 5 in der Reihenfolge von 1, 4, 10, 15, 6, 1 umgeben, und wenn man abwechselnde Zahlen nimmt, erhält man 1×10×6 = 4×15×1 = 60.

8 Quincunx-Muster

Die Hexagone auf dem Brett sind in einem Quincunx-Muster angeordnet, einer Anordnung von fünf Objekten, bei der vier an den Ecken eines Quadrats oder Rechtecks liegen und das fünfte in der Mitte (wie die 5 auf einem Würfel).

9 Diagonalen und Dreieckszahlen

Die Diagonalen enthalten die figurierten Zahlen der Simplexe, wobei die linke und rechte Kante nur Einsen enthält. Die folgenden Diagonalen enthalten natürliche bzw. Zählzahlen, dann Dreieckszahlen (Anzahl der Punkte in einer gleichseitigen Dreiecksanordnung), dann Tetraederzahlen (dreieckige Pyramidenzahlen), dann Pentatopezahlen, gefolgt von den 5-, 6- und 7-Simplexzahlen. Das Quadrat jeder natürlichen Zahl entspricht der Summe eines Paares benachbarter Einträge auf der dritten Diagonalen (Dreieckszahlen). Beispiel: $7^2 = 49 = 21 + 28$

10 Hockeyschläger-Muster

Die Summe der Zahlen in einer Diagonalen, beginnend an der Kante mit der 1, entspricht der Zahl in der nächsten darunterliegenden Diagonalen. Das Umranden dieser Zahlen zeigt ein Hockeyschläger-Muster, wie hier bei 1 + 10 + 55 = 66.

11 Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ ist die Beziehung zwischen Beobachtungen und ihrer Wahrscheinlichkeit. Sie definiert die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable innerhalb eines bestimmten Bereichs kontinuierlicher Zufallsvariablen auftritt. Eine wichtige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist die einer gaußschen bzw. normalverteilten Zufallsvariable, die wie eine glockenförmige Kurve aussieht. Diese $f(x)$-Werte setzen eine Normalverteilung mit einem Sigma (σ) von 1 voraus.

12 Kastennummern, Erwartete Prozentsätze und Standardabweichungen

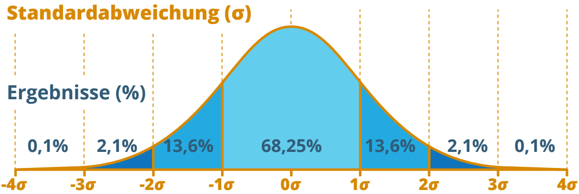
Die 15 Kugelkästen sind von 0 bis 14 nummeriert, sodass die Position der goldenen Kugel leicht identifiziert und aufgezeichnet werden kann. Außerdem können die Wahrscheinlichkeiten aus Pascals Dreieck für das Auftreten eines zufälligen Ergebnisses in einem bestimmten Kasten bestimmt werden, indem man sich eine 15. Zeile des Dreiecks vorstellt (n=14).

Die erwarteten Prozentsätze der Ergebnisse pro Kasten sind direkt unter der Kastennummer angegeben, wobei im mittleren Kasten (Nr. 7) 20,9 Prozent erwartet werden.

Unter der Kasteninformationsachse befindet sich die Standardabweichungsachse. Auf jeder Standardabweichungslinie in der Kurve steht oben die entsprechende Anzahl an Standardabweichungen vom Mittelwert bis zu 4 Standardabweichungen ($\mu \pm 4\sigma$). Ein Pfeil zeigt an, dass sich die ±4. Standardabweichungen über den letzten Kasten hinaus erstrecken. Die Linie in der Mitte der Glockenkurve ist der Durchschnitt (Mittelwert, μ, „mu"). Zwischen jeder Standardabweichungslinie steht der Prozentsatz der Ergebnisse, die für diesen Bereich der Glockenkurve erwartet würden.

13 Glockenkurve

Die Normalverteilung, oft als „Glockenkurve" bezeichnet, ist die bekannteste und am weitesten verbreitete aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Da die Normalverteilung viele natürliche Phänomene sehr gut annähert, hat sie sich zu einem Referenzstandard für zahlreiche Wahrscheinlichkeitsprobleme entwickelt. Mehrere Datensätze folgen der Normalverteilung, wie die Körpergrößen von Erwachsenen, die Gewichte von Babys, Klassentestergebnisse, große Stichproben monatlicher Renditen von Aktienmarktindizes und die Kugeln im Galton-Brett. Das folgende Diagramm zeigt die Glockenkurve, unterteilt nach den Standardabweichungen.



Die Einschränkungen kleiner Hexagone und Kanäle in diesem physischen Galton-Brett führen zu einer breiteren Glockenkurve. Auf dem Brett ist eine „Best-Fit"-Kurve aufgedruckt, die sich leicht von der oben gezeigten unterscheidet.

14 Binomialverteilung der Stahlkugeln

Jede Stahlkugel stellt eine **unabhängig und identisch verteilte (iid)** Zufallsvariable dar, die aus dem Reservoir durch ein festes Muster von Hexagonen fällt. Eine Binomialverteilung entsteht durch die Tausenden von Stahlkugeln aus den 14 Bernoulli-Versuchen für jede Kugel, ein Versuch pro getroffenem Hexagon. Die diskrete Binomialverteilung der Kugeln nähert die kontinuierliche Normalverteilung sehr genau an.

15 Goldene Kugel

Unter den 4.280 Stahlkugeln von 0,8 mm befindet sich eine goldene Kugel von 2,0 mm. Diese Kugel demonstriert ein einzelnes zufälliges Ergebnis.

16 Standardabweichungslinien

Die Standardabweichung (σ) ist ein Maß dafür, wie eng alle Datenpunkte um den Mittelwert (μ) gruppiert sind. Die Form einer Normalverteilung wird durch den Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt. Etwa 68 Prozent der Daten in einer Normalverteilung liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert. Etwa 95 Prozent liegen innerhalb von zwei Standardabweichungen, etwa 99,7 Prozent innerhalb von drei Standardabweichungen und etwa 99,99 Prozent innerhalb von vier Standardabweichungen. Bei 14 Reihen von Hexagonen in Pascals Dreieck gibt es 14 Hexagone in der unteren Reihe des Dreiecks. Es gibt 15 Kästen, mit einem Kasten an jedem Ende und zwischen jedem Hexagon. Diese 15 Kästen repräsentieren insgesamt 2x15/14 = 8,0 Verteilungsstandardabweichungen ($\mu \pm 4\sigma$). Jeder Kasten entspricht 0,533 Standardabweichungen und jede Standardabweichung entspricht 1,875 Kästen (8/15 = 0,533 bzw. 15/8 = 1,875).

Standardabweichung einer Stichprobe

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Standardabweichung der Population

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}}$$

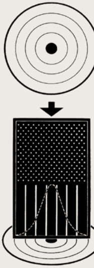
DIE EAMES-INTERPRETATION DES GALTON-BRETTS

Die Eames-Infografik für ihr Galton-Brett

Unser Galton-Brett ist ein Desktop-Design, das an Charles' und Ray Eames' bahnbrechendes, 11 Fuß hohes „Galton's Probability Board" erinnert, das auf der Ausstellung Mathematica: A World of Numbers … and Beyond von 1961 präsentiert wurde. Ein noch größeres, 14½ Fuß hohes Eames-Probability-Board wurde im IBM-Pavillon auf der Weltausstellung 1964 in New York gezeigt. Rechts abgebildet ist eine Mini-Version des Informationsschildes der Mathematica-Ausstellung von 1961.

GALTONs

WAHRSCHEINLICHKEITSBRETT



DIESE MASCHINE ZEIGT, WIE MAN DURCH EIN EXPERIMENT EINE WAHRSCHEINLICHKE ITSKURVE ERMITTELN KANN

HORACE HAT EINE BESTIMMTE WAHRSCHEINLICHKEIT, DIE ZIELMITTE ZU TREFFEN

ER KANN EINE VORSTELLUNG VON DIESER WAHRSCHEINLICHKEIT BEKOMMEN, INDEM ER ZÄHLT, WIE VIELE PFEILE DIE ZIELMITTE TREFFEN, UND DIESE ZAHL MIT DER GESAMTZAHL DER GEWORFENEN PFEILE VERGLEICHT

JE MEHR PFEILE ER WIRFT, DESTO BESSER KANN ER DIESE WAHRSCHEINLICHKEIT EINSCHÄTZEN.

IM GRUNDE WIRFT DAS GALTON-BRETT EINE KUGEL AUF DEN MITTLEREN KASTEN.

DIE STIFTE VERURSACHEN ABWEICHUNGEN (SO WIE HORACE), WODURCH DIE MEISTEN KUGELN DIE ZIELMITTE VERFEHLEN.

WIR KÖNNEN DIE WAHRSCHEINLICHKEIT, EINEN BESTIMMTEN KASTEN ZU TREFFEN, ABSCHÄTZEN, INDEM WIR ZÄHLEN, WIE VIELE KUGELN IN DIESEM KASTEN LANDEN.

BEACHTEN SIE, WIE NAH DIE VON DEN KUGELN GEBILDETE KURVE DER AUF DAS GLAS GEMALTEN KURVE KOMMT

Eine Kugel kann in jeden Kasten fallen, und doch füllt sich jeder Kasten bei jeder Wiederholung des Experiments nahezu auf die gleiche Höhe.

DIESE STABILITÄT ENTSTEHT DURCH DIE TATSACHE, DASS ES VIELE KUGELN GIBT.

Unvorhersehbar

Vorhersehbarer

WENN EIN ZUFALLSEREIGNIS SEHR VIELE MALE AUFTRITT, SIND DIE DURCHSCHNITTSERGEBNISSE WAHRSCHEINLICH VORHERSAGBAR *

* Der erste mathematische Lehrsatz dieser Art wurde von Jakob Bernoulli bewiesen.

„Mit einer der Gewissheit beliebig nahe kommenden Wahrscheinlichkeit dürfen wir erwarten, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses in einer Reihe unabhängiger Versuche mit konstanter Wahrscheinlichkeit um weniger als eine beliebig vorgegebene positive Zahl von dieser Wahrscheinlichkeit unterscheidet, sofern die Zahl der Versuche hinreichend groß ist.“

Jacob Bernoulli (1654-1705)

„RELATIVE HÄUFIGKEIT“ ist die Anzahl der Male, in denen ein Ereignis* eintritt, geteilt durch die Anzahl der Versuche.**

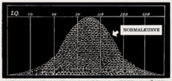
Im Wahrscheinlichkeitsbrett (Probability Board) ist das Freisetzen einer Kugel ein ** VERSUCH.

Das Landen (oder Nichtlanden) in einem bestimmten Kasten ist ein Ereignis.

Die auf das Glas gemalte Kurve wurde durch eine Formel berechnet.

DIESE KURVE IST EINE BESTIMMTE THEORETISCHE KURVE, DIE „NORMALKURVE“ GENANNT WIRD UND DAS VERHALTEN VON FOLGENDEN DINGEN BESCHREIBT -

I.Q. TESTS



WENN MAN MENSCHEN NACH IHREN I.Q.-WERTEN IN KÄSTEN ANORDNEN WÜRDE, WÜRDEN SIE DIE „NORMALKURVE“ BILDEN.

DIE MESSWERTE VON SCHÖNHEITSWETTBEWERBS GEWINNERINNEN

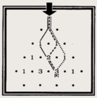
EINSÄTZE BEIM ROULETTE

FEHLER IN DER MESSUNG

WENN DIE KUGELN FALLEN GELASSEN WERDEN, SIND SIE ALLE AUF DEN MITTLEREN KASTEN AUSGERICHTET. DIE SUMME ALLER DURCH DAS TREFFEN DER STIFTE VERURSACHTEN FEHLER BESTIMMT DIE ENDLAGE DER KUGELN.

Der Durchschnitt vieler unabhängiger Fehler führt fast immer zur Normalkurve, unabhängig davon, welcher Prozess zugrunde liegt.

DER „ZENTRALGRENZWERTSATZ“ IST EINE PRÄZISE FORMULIERUNG DER BEDINGUNGEN, DIE ZUR NORMALKURVE FÜHREN.



LaPLACE (1749-1827) DeMOIVRE (1667-1754)

PASCALS DREIECK

Die Anzahl der möglichen Wege zu einem bestimmten Platz im Stiftfeld wird durch Pascals Dreieck angegeben. Denn die Anzahl der Wege zu einem Platz ist die Summe der Wege zu den beiden Plätzen darüber. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in einen bestimmten Kasten fällt, kann man finden, indem man die Anzahl der Wege zu diesem Kasten zählt und sie mit der Gesamtzahl der Wege vergleicht.

Wenn die Zahl der Versuche groß wird, nähert sich die Verteilung der Kugeln wahrscheinlich einer Normalverteilung an. Diese Idee, zuerst in Abraham de Moivres „Doctrine of Chances“ formuliert, wurde später vom Marquis de Laplace bewiesen und als Laplace-de-Moivre-Grenzwertsatz bezeichnet. Im Laufe der folgenden hundert Jahre entstand durch intensive Forschung eine wesentlich allgemeinere Aussage derselben Art – der „Zentralgrenzwertsatz“, allgemein anerkannt als eines der wichtigsten Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie.

WAHRSCHEINLICHKEIT IST ADDITIV

WENN DIE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR „5“ IST $\frac{1}{6}$ UND DIE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR „4“ IST $\frac{1}{6}$

DANN IST DIE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR „5“ ODER „4“ 1/6 + 1/6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

WAHRSCHEINLICHKEIT IST WIE FLÄCHE ADDITIV. DAHER LÄSST SICH WAHRSCHEINLICHKEIT OFT ALS FLÄCHE UNTER EINER KURVE DARSTELLEN.

Zum Beispiel ist im Wahrscheinlichkeitsbrett die Wahrscheinlichkeit, in den -

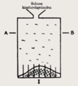
Wird durch die entsprechende Fläche dargestellt.

Der Zweig der Mathematik, der sich mit der Bestimmung von Längen und Flächen befasst, heißt „MASSTHEORIE“ Wahrscheinlichkeit ist ein Teilgebiet der Maßtheorie.

DER QUINQUNX

Die Stifte im Wahrscheinlichkeitsbrett sind oft in einer Figur angeordnet, die in der Natur vorkommt – die vier Ecken eines Quadrats mit einem Stift in der Mitte, genannt ein Quincunx.

GALTONS WAHRSCHEINLICHKEITSBRETT 1877



GALTONIA (Hyacinthus candicanus)

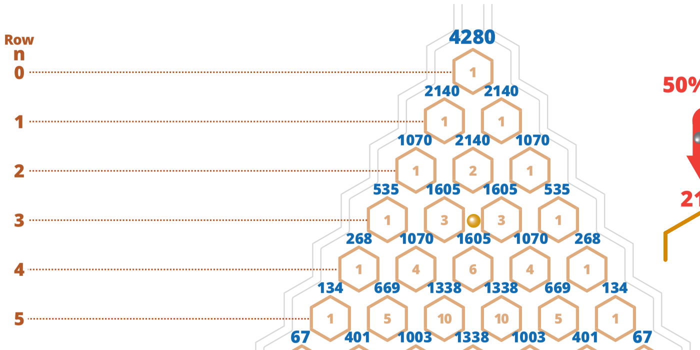
SIR FRANCIS GALTON (1822–1911)

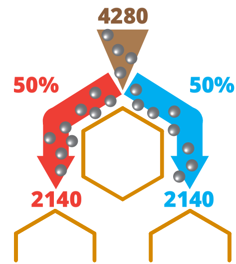
Galton war ein Cousin von Charles Darwin. Zusätzlich zur Mathematik studierte und schrieb er über Botanik, Vererbung, Geographie, Psychologie, statistische Methoden und das Bergsteigen.

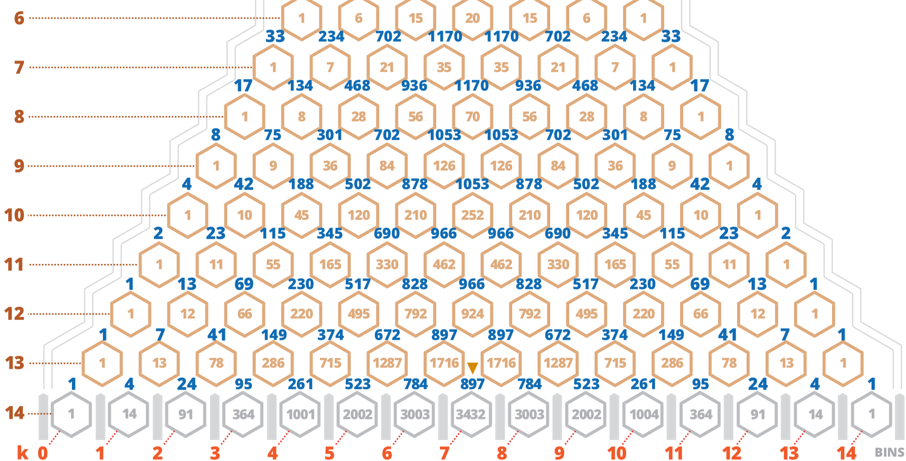
IBM

SYMMETRISCHE BINOMIALVERTEILUNG DER KUGELN

Bei einem waagerecht ausgerichteten Galton-Brett besteht an der Spitze jedes Hexagons eine gleiche Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln entweder nach links oder nach rechts abgelenkt werden. Dies ist ein Beispiel für einen Bernoulli-Versuch. Diese Darstellung zeigt die erwartete Anzahl von Kugeln, die zwischen jedem Hexagon weiterlaufen. Im Kugelreservoir befinden sich ungefähr 4.280 Kugeln. Am ersten Hexagon, das als Zeile Null gilt, werden erwartungsgemäß 2.140 Kugeln nach links und 2.140 Kugeln nach rechts laufen. Wenn man die Aufteilung der Kugeln bei jedem Schritt verfolgt, kann man sehen, wie viele Kugeln nach der 14. Reihe (Zeile 13) voraussichtlich in jedem Kasten landen. Die Zahl auf jedem Hexagon in Pascals Dreieck kann als die Anzahl der Wege interpretiert werden, um zur **k-ten** Position der Zeile **n** zu gelangen. Zum Beispiel sind in Zeile 4 die Zahlen auf den Hexagonen **1, 4, 6, 4, 1** . Wenn wir diese Zahlen addieren, erhalten wir insgesamt 16 Wege, um alle 5 Hexagone in Zeile 4 zu erreichen. Dies entspricht ebenfalls 2 hoch der Zeilennummer ($2^4 = 16$).



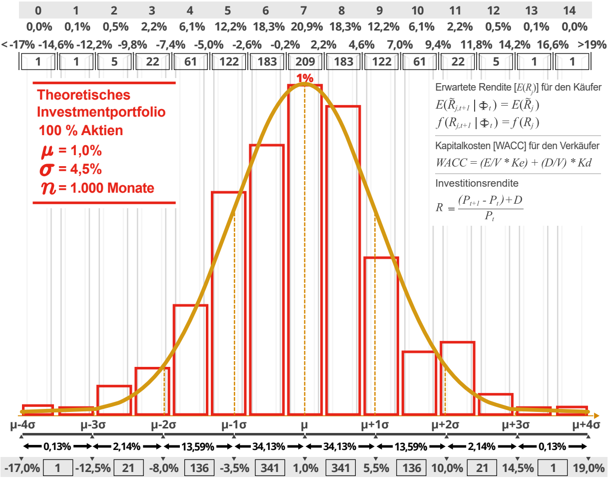




Zeile 14 (in Grau) von Pascals Dreieck kann verwendet werden, um die Wahrscheinlichkeiten (eine symmetrische Binomialverteilung) dafür zu bestimmen, dass eine Kugel in einen der 15 Kästen am unteren Rand des Galton-Bretts fällt. Nach der oben gezeigten Berechnung für n=4 würde der erwartete Prozentsatz im mittleren Kasten (k = 7) der Zeile 14 3.432/16.384 = 20,95 % betragen. Bei 4.280 Kugeln würde das bedeuten, dass 897 Kugeln in diesen Kasten fallen sollten. Wenn es 16.384 Kugeln gäbe, würden die Zahlen auf jedem Hexagon in Zeile 14 genau der erwarteten Anzahl von Kugeln entsprechen, die in jedem Kasten landen.

Darstellungen des Investmentportfolios

Um Marktrenditen darzustellen, wählten wir ein theoretisches Investmentportfolio aus. Die roten Balken, die auf der Rückseite des Brettes aufgedruckt sind, stellen ein Histogramm der Verteilung von 1.000 monatlichen Renditen eines theoretischen Investmentportfolios dar. Der rote Balken veranschaulicht ein 100 % Aktienportfolio (aggressiv), dem wir eine durchschnittliche monatliche Rendite von 1,0 % und eine Standardabweichung von 4,5 % bei einer Stichprobengröße von 1.000 Monaten zugrunde legen. Mit vier Standardabweichungen ergibt sich daraus eine Renditespanne von etwa –17 % bis 19 % [1 – (4x4,5) = –17; 1 + (4×4,5) = 19]. Das bedeutet, dass bei 15 Kästen die Renditespanne pro Kasten 2,4 % beträgt, wobei der Mittelwert von 1,0 % genau in der Mitte liegt.



Kastentrenner mit Erwarteten Prozentsätzen und Renditen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
0.0%	0.1%	0.5%	2.2%	6.1%	12.2%	18.3%	20.9%	18.3%	12.2%	6.1%	2.2%	0.5%	0.1%	0.0%	
< -17%	-14.6%	-12.2%	-9.8%	-7.4%	-5.0%	-2.6%	-0.2%	2.2%	4.6%	7.0%	9.4%	11.8%	14.2%	16.6%	>19%
1	1	5	22	61	122	183	209	183	122	61	22	5	1	1	

Über dem Histogramm der Marktrenditen sind vier Skalen zu berücksichtigen. Die erste ist lediglich eine Nummerierung der 15 Kästen von 0–14. Die zweite Skala zeigt den Prozentsatz der Zufallsvariablen - in diesem Fall der monatlichen Renditen -, die voraussichtlich in jedem Kasten landen. Die dritte Skala ist die Schätzung des erwarteten Prozentsatzes der monatlichen Renditespannen für jeden der Kästen. Die Kastentrenner sind so skaliert, dass der Rand des Brettes den vier Standardabweichungen der Renditen entspricht (≈99,99 Prozent der Ergebnisse oder $\mu \pm 4\sigma$). Die untere Skala zeigt die erwartete Anzahl von Monaten in jedem Kasten basierend auf einer Stichprobengröße von 1.000 Monaten.

Untere Achse

μ-4σ		μ-3σ		μ-2σ		μ-1σ		μ		μ+1σ		μ+2σ		μ+3σ		μ+4σ
	0.13%		2.14%		13.59%		34.13%		34.13%		13.59%		2.14%		0.13%	
-17.0%	1	-12.5%	21	-8.0%	136	-3.5%	341	1.0%	341	5.5%	136	10.0%	21	14.5%	1	19.0%

Auf der unteren Achse befinden sich drei Skalen. Die erste markiert die Standardabweichungslinien. Die zweite gibt den Prozentsatz der Ergebnisse an, die zwischen den einzelnen Standardabweichungslinien erwartet werden. Die dritte Reihe schätzt, wie viele monatliche Renditen zwischen jeder Standardabweichungslinie erwartet werden, basierend auf einer Stichprobe von 1.000 Monaten.

Das Random-Walk-Modell

Die Hypothese effizienter Märkte besagt, dass der aktuelle Preis ($p_{j,t}$) eines Wertpapiers (j) die verfügbaren Informationen (Φ_t) vollständig widerspiegelt, was bedeutet, „...dass die aufeinanderfolgenden Preisänderungen oder, üblicherweise, die aufeinanderfolgenden Einperiodenrenditen unabhängig sind. Außerdem wird angenommen, dass aufeinanderfolgende Änderungen bzw. Renditen identisch verteilt sind. Zusammen bilden die beiden Hypothesen das Random-Walk-Modell. Formal besagt das Modell, dass:

$$f(R_{j,t+1} \mid \Phi_t) = f(R_j),$$

was der üblichen Aussage entspricht, dass die bedingten und die marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer unabhängigen Zufallsvariable identisch sind. Außerdem muss die Dichtefunktion (f) für alle Zeitpunkte (t) gleich sein.“ Wenn wir annehmen, dass die erwartete Rendite eines Wertpapiers über die Zeit konstant ist, gilt:

$$E(\tilde{R}_{j,t+1} \mid \Phi_t) = E(\tilde{R}_j).$$

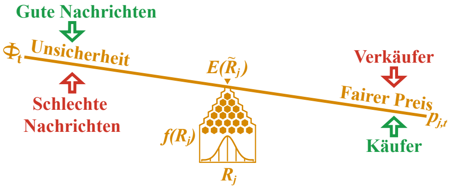
Quelle: Eugene F. Fama & Merton H. Miller, *The Theory of Finance,* 1972, S. 339

Das Hebner-Modell

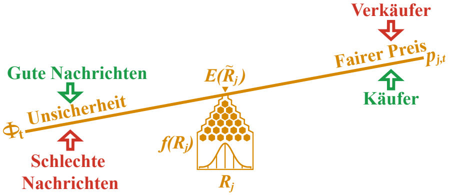
Die folgenden Wippen-Diagramme veranschaulichen Eugene Famas Hypothese effizienter Märkte, die besagt, dass die Preise von Wertpapieren (j) alle verfügbaren Informationen vollständig widerspiegeln und dadurch zu fairen Preisen führen. Die linke Seite der Wippe stellt diejenige Informationsmenge (Φ_t) dar, von der angenommen wird, dass sie zu diesem Zeitpunkt (t) vollständig im Preis enthalten ist, und die rechte Seite stellt die Preise ($p_{j,t}$) dar, die Millionen freiwilliger Käufer und Verkäufer auf Grundlage dieser Informationsmenge zu jenem Zeitpunkt als faire Preise erachtet haben. Die Hypothese effizienter Märkte behauptet, dass in einem gut organisierten, hinreichend transparenten Markt der Marktpreis (p_t) im Allgemeinen dem fairen Wert entspricht oder nahekommt, da Anleger schnell reagieren, um neue Informationen (Φ_t) über relative Knappheit, Nutzen oder potenzielle Renditen in ihren Tausch von Geld gegen Wertpapiere einzubeziehen.

Die drei Komponenten des Modells kamen Mark Hebner während der globalen Finanzkrise 2008 in den Sinn. Es beginnt mit der Wippe, die oben auf dem Pascal-Dreieck platziert ist. Dann stellen die Kugeln, die umherprallen und durch ein Feld von Hexagonen fallen, die Zufälligkeit der monatlichen Aktienmarktrenditen ($R_{j,t+1}$) dar. Drittens landen die Kugeln in den Kästen, die die realisierten Renditen (R_j) darstellen, die in großen Stichproben der Glockenkurve ($f(R_j)$) ähneln.

Es gibt einen zufälligen und kontinuierlichen Fluss guter Nachrichten und Prognosen sowie schlechter Nachrichten und Prognosen, der zu jedem Zeitpunkt die Unsicherheit der erwarteten Rendite einer Anlage ($E(\tilde{R}_j)$) darstellt, die auf einem konstanten Risikoniveau gehalten wird. Wenn die Unsicherheit aufgrund schlechter Nachrichten zunimmt, muss der Preis proportional sinken, damit die erwartete Rendite im Wesentlichen konstant bleibt.



Wenn die Unsicherheit aufgrund guter Nachrichten abnimmt, muss der Preis proportional steigen, damit die erwartete Rendite im Wesentlichen konstant bleibt.



Dieses Modell ist als Hebner-Modell bekannt und sollte als ein Rahmen verstanden werden, der das Galton-Brett und das Pascal-Dreieck in das Verständnis der Funktionsweise von Märkten einbezieht.

Kapitalkosten

In der Volkswirtschaftslehre und in der Buchhaltung sind die Kapitalkosten die Kosten der Finanzmittel eines Unternehmens (sowohl Fremd- als auch Eigenkapital) oder – aus Sicht eines Anlegers – die erforderliche Rendite auf die bestehenden Wertpapiere eines Unternehmens. Sie werden auch verwendet, um neue Projekte eines Unternehmens zu bewerten. Es ist die Mindestrendite, die Anleger für die Bereitstellung von Kapital an das Unternehmen erwarten und damit die Messlatte festlegen, die ein neues Projekt erreichen muss.

$$WACC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)$$

E ist der Marktwert des Eigenkapitals des Unternehmens.
V ist der gesamte Marktwert von Eigen- und Fremdkapital, also $E+D$.
Ke sind die Eigenkapitalkosten.
D ist der Marktwert der Verbindlichkeiten des Unternehmens.
Kd sind die Fremdkapitalkosten.
$WACC$ sind die gewichteten durchschnittlichen Kapitalkosten.
Zur Erinnerung: Die erwartete Rendite der Käuferin bzw. des Käufers ist auch die Kapitalkosten der Verkäuferin bzw. des Verkäufers ($E(\tilde{R}_{j,t}) = WACC$).

Renditeformel

Die Formel für die realisierte Rendite bzw. den realisierten Verlust (R) einer Anlage ist die Preisänderung (P_{t+1} - P_t) zuzüglich der während des Zeitraums an die Anlegerin bzw. den Anleger gezahlten Dividenden oder Barausschüttungen (D), dividiert durch den ursprünglichen Preis (P_t) der Anlage.

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

Fama/French-Faktormodelle

Fama/French-Fünf-Faktoren-Modell für Aktien

Das Fama/French-Fünf-Faktoren-Modell für Aktien ist ein Asset-Pricing-Modell, das darauf abzielt, die Markt-, Größen-, Value-, Profitabilitäts- und Investitionsmuster in durchschnittlichen Aktienrenditen abzubilden. Es wurde 2014 vom Nobelpreisträger Eugene Fama und seinem Mitautor und Kollegen Kenneth French entwickelt. Das Modell erklärt zwischen 71 Prozent und 94 Prozent der Querschnittsvarianz der erwarteten Renditen für diversifizierte Aktienportfolios über fünf Faktoren. Es baut auf dem CAPM (1964) und dem Fama/French-Drei-Faktoren-Modell (1993) auf. Die Gleichung des Fama/French-Fünf-Faktoren-Modells ist eine Zeitreihenregression einer Reihe von Forschungsindizes, die von Fama und French erstellt wurden und langfristige historische Aktienkurse verschiedener Unternehmensmerkmale enthalten. Der Koeffizient für jeden Faktor (unabhängige Variablen) zeigt die Exponierung bzw. Gewichtung gegenüber diesem Faktor im Portfolio an. Wenn die Exposition gegenüber den fünf Faktoren, Markt (b_i), Größe (s_i), Wert (h_i), Profitabilität (r_i) und Investition (c_i), die gesamte Variation der erwarteten Renditen erfasst, dann ist der Alpha-Achsenabschnitt (a_i) in der folgenden Gleichung für alle Wertpapiere und Portfolios i) gleich Null.

$$R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{it}$$

R_{it} ist die Rendite des Portfolios i für den Zeitraum t (abhängige Variable).
R_{Ft} ist die risikofreie Rendite.
R_{Mt}-R_{Ft} ist die Renditedifferenz zwischen dem kapitalisierungsgewichteten Aktienmarkt und …
SMB_t ist die Rendite eines diversifizierten Portfolios aus Small Stocks minus der Rendite eines diversifizierten Portfolios aus Big Stocks (d. h. der Size-Effekt).
HML_t iist der Unterschied zwischen der Rendite diversifizierter Portfolios aus Aktien mit hohem und niedrigem Buch-zu-Markt-Verhältnis (d. h. dem Value-Effekt).
RMW_t ist die Differenz zwischen den Renditen diversifizierter Portfolios von Aktien mit robuster bzw. schwacher Profitabilität.
CMA_t ist die Differenz zwischen den Renditen diversifizierter Portfolios von Aktien von Unternehmen mit niedrigen bzw. hohen Investment-Werten, die Fama/French als konservativ bzw. aggressiv bezeichneten.
e_{it} ist der Fehlerterm und ein Residuum mit dem Erwartungswert Null.

Quelle: Fama, Eugene F. und French, Kenneth R., *A Five-Factor Asset Pricing Model* (September 2014).

MEINE FASZINATION FÜR DAS GALTON-BRETT

Mark T. Hebner

Mein Name ist Mark T. Hebner und ich bin der CEO und Gründer von Index Fund Advisors, Inc. (IFA.com). Mein Unternehmen ist im Bereich Vermögensverwaltung und Steuererklärung tätig. Ich bin auch der Schöpfer mehrerer moderner Galton-Bretter.

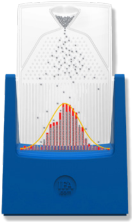
Die gängigste Methode, um das Risiko und die Rendite einer Anlage zu beschreiben, besteht darin, ihre Durchschnittsrendite und die Standardabweichung der Rendite anhand einer großen Stichprobe historischer Renditen, beispielsweise 1.000 Monate an Indexdaten, zu schätzen. Wenn Sie möchten, dass Excel eine Glockenkurve zeichnet, benötigen Sie nur den Durchschnitt und die Standardabweichung. Diese definieren die Glockenkurve. Es stellte sich heraus, dass die Nobelpreis-gekrönte Streuungsdarstellung von Harry Markowitz von Durchschnittsrendite im Vergleich zur Standardabweichung lediglich ein Vergleich von Glockenkurven war. Stellen Sie sich also meine Begeisterung vor, als ich ein physikalisches Gerät fand, das eine Glockenkurve erzeugt. Mir wurde klar, dass es eine eindrucksvolle Demonstration dafür ist, wie Märkte funktionieren und wie wahrscheinlich eine Reihe verschiedener Ergebnisse ist. Mir fiel auch auf, dass das Galton-Brett monatliche Anlagerenditen simuliert und es den Leuten ermöglicht, die konstanten erwarteten Renditen, die Zufälligkeit der Renditen über einen Zeitraum von dreißig Tagen und die daraus resultierende Glockenkurve der realisierten Renditen über sehr lange Zeiträume zu sehen Einfach ausgedrückt: Dieses Gerät hilft Anlegern, kritische Anlageideen zu verstehen.

Meine Faszination für das Galton-Brett wurde bereits 2005 entfacht, als ich einen Film des Eames Office über die Weltausstellung von 1964 sah. Charles Eames baute für die IBM-Ausstellung ein vierzehneinhalb Fuß hohes Galton-Brett im Freien, das einem früheren Entwurf nachempfunden war, den er für *Mathematica: A World of Numbers... and*

Beyond gebaut hatte. *Mathematica* war die erste vollständig immersive und groß angelegte Ausstellung, die vom Eames Office produziert und von IBM gesponsert wurde. Sie wurde für die Eröffnung eines neuen Wissenschaftsflügels im California Museum of Science and Industry in Los Angeles im Jahr 1961 konzipiert

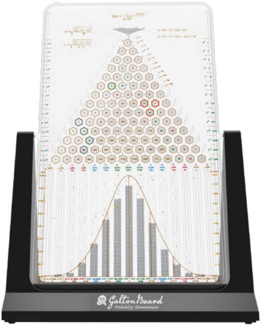
2,4-Meter-Galton-Brett in der Lobby von IFA

Mein erstes Galton-Brett, das hier abgebildet ist, wurde vom Oregon Museum of Science and Industry entworfen und gebaut. Die Fotografie zeigt einen 2,4 Meter hohen und 1,2 Meter breiten Wahrscheinlichkeitsdemonstrator in Museumsqualität, den ich 2009 in Auftrag gab, um Investoren über die Bandbreite, die Wahrscheinlichkeit und die Form der Ergebnisse aufzuklären, die sich aus einer Reihe zufälliger Ereignisse ergeben. Dieses Galton-Brett steht in der Lobby des Büros von Index Fund Advisors und trägt dazu bei, Ordnung inmitten des Chaos darzustellen, welches der Random Walk der Wall Street ist. Die roten Balken hinter den Perlen stellen eine große Stichprobe monatlicher Renditen eines theoretischen Anlageportfolios dar und ermöglichen den Vergleich der Perlen mit dem Aktienmarkt. Am Aktienmarkt sind zufällige Ereignisse die Nachrichten über ein Unternehmen oder über den Kapitalismus im Allgemeinen und die Wertpapierpreise, die diese Informationen widerspiegeln. Der zufällige Fluss der Perlen, ausgehend von einem zentralen Punkt, simuliert eine Reihe fairer Preise, die letztendlich eine Normalverteilung der monatlichen Renditen in Form einer Glockenkurve bilden.


The Random Walker®

Mit der Hilfe von Philip Poissant, Jerry Xu, Art Forster, Jackson Lin, Mike Auchterlonie, der

Familie Brunson und anderen habe ich 2015 mein erstes siebeneinhalb Zoll hohes Galton-Brett für den Schreibtisch, genannt The Random Walker® (US-Patent Nr. D784,449), entwickelt. Diese kompakte Version des Galton-Bretts ist nicht nur ein hilfreiches Lehrmittel zum Verständnis statistischer Konzepte und der Zufälligkeit des Aktienmarktes, sondern auch ein reizvolles Schreibtischgerät zum Spielen. Mit einem innovativen Flip-n-Reset-Design kann man die Ordnung im Chaos ganz einfach mit einer Fingerspitze erleben. Etwa 60.000 dieser Bretter stehen auf Schreibtischen auf der ganzen Welt.



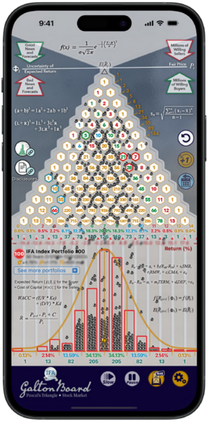
Galton-Brett: Wahrscheinlichkeitsdemonstrator

Im Jahr 2024 haben wir eine neue, größere Ausgabe des Galton-Bretts geschaffen, die bessere Demonstrationen für andere Personen ermöglicht Wir haben es 12 Zoll mal 8,5 Zoll groß gemacht und es Galton Board: Probability Demonstrator (US-Patent Nr. 12,268,971 B1) genannt. Dieses Modell fügte außerdem zwei Stock-Market-Clip-ons [Ansteck- oder Aufsatzteile zum Aktienmarkt] und eine 19-seitige detaillierte und lehrreiche Bedienungsanleitung hinzu.

Diese Version des Schreibtischgroßen Bretts beinhaltet viele neue Designverbesserungen gegenüber der vorherigen Iteration. Es erfasst die Konzepte der Binomialverteilung und des Pascalschen Dreiecks sowie die vielen eingebetteten mathematischen Konzepte präziser. Durch das Hinzufügen der Clip-ons mit monatlichen Renditedaten kann man die Einbeziehung von Elementen des Aktienmarkts, einschließlich des Hebner-Modells, sehen und wie gut diese zur Glockenkurve der Perlen passen.

Dieses neue einfache Galton-Brett ermöglicht ein wirtschaftliches und kompaktes Design, das sogar in Ihre Hemdtasche passt.

Um das Verständnis der im Galton-Brett und im Pascalschen Dreieck verankerten Prinzipien weiter zu fördern, habe ich 2023 eine App-Version des Galton-Bretts in Auftrag gegeben und erstellt Diese App-Version nutzt den Gyrometer, der es Ihnen ermöglicht, das Telefon oder iPad zu drehen und die Perlen fließen zu hören und zu sehen, als wären es physische Perlen, die in Ihrem Gerät herumrollen. Durch Tippen auf das Einstellungssymbol können Sie auch zwanzig Indexportfolio-Histogramme einblenden und die Änderung der Renditeskala der Bins [Fächer] sehen, wenn sich das Risiko ändert. Um die App für iPhone und iPad zu erhalten, besuchen Sie den Apple App Store und suchen Sie nach „Index Fund Advisors"- Suchen Sie dann nach dem Galton-Brett-Symbol in der App, um auf das interaktive Brett zuzugreifen. Sie können auch den Mac App Store auf Ihrem Mac Laptop oder Desktop besuchen und nach der Galton Board App suchen. Besuchen Sie schließlich den Google Play Store für Android-Geräte und suchen Sie nach „Index Fund Advisors".



Galton-Brett: App-Version

Holen Sie sich die App

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

Über Index Fund Advisors

Index Fund Advisors
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

Spekulation durch Bildung ersetzen

Index Fund Advisors, Inc. (IFA) ist ein Honorar-basiertes Beratungs- und Vermögensverwaltungsunternehmen, das risikogerechte, global diversifizierte und steueroptimierte Anlagestrategien unter Einhaltung eines treuhänderischen Sorgfaltsmaßstabs anbietet.

IFA ist ein registrierter Anlageberater, der Anlageberatung für Einzelpersonen, Altersvorsorgepläne, Trusts, Unternehmen, gemeinnützige Organisationen sowie öffentliche und private Institutionen anbietet. IFA wurde 1999 gegründet und feierte 2024 sein 25-jähriges Jubiläum. IFA bietet Anlageberatung für Kunden in den gesamten Vereinigten Staaten.

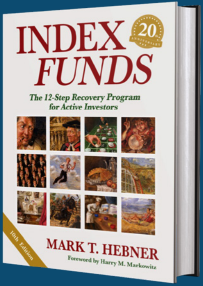
Der Wert von IFA geht über die Anlageberatung hinaus. Als ganzheitlicher Finanzpartner bietet IFA Anlageberatung zusammen mit Vermögensverwaltung und Finanzplanung an, um Kunden bei der Steuerung ihrer finanziellen Reise zu unterstützen. Unsere Vermögensberater verfolgen einen personalisierten Ansatz bei der Zusammenstellung von Portfolios für ihre Kunden und bieten gleichzeitig eine vollständige Palette von Vermögensverwaltungsdienstleistungen und Finanzplanung für eine durchdachte und umfassende Kundenerfahrung an

IFA versucht, unnötige kostentreibende Aktivitäten zu vermeiden, die oft mit der Auswahl einzelner Aktien, dem Timing des Marktes sowie der Auswahl von Managern und Anlagestilen verbunden sind. Stattdessen wendet IFA einen disziplinierten, quantitativen Ansatz an, der darauf abzielt, die Diversifikation zu optimieren und gleichzeitig kosteneffizient zu bleiben.

IFA integriert Forschung und Indizes, die auf der Arbeit von Eugene Fama und Kenneth French basieren, und nutzt dabei jahrzehntelange historische Risiko- und Renditedaten, Indexfonds-Designs der dritten Generation und verfeinerte passive Handelstechniken, die von Dimensional Fund Advisors entwickelt wurden.

IFA bietet Anlagemanagement- und Portfoliostrategien, die auf die Umstände und Ziele der Kunden zugeschnitten sind, zusammen mit Steuerplanung und Buchhaltung, Online-Finanzplanung und Empfehlungsdiensten für ein durchdachtes und personalisiertes Kundenerlebnis. Ein erfahrener IFA Vermögensberater bietet personalisierte Beratung, die darauf abzielt, Kunden bei der Verfolgung ihrer langfristigen finanziellen Ziele zu unterstützen.

Mark T. Hebner ist der Gründer und CEO von Index Fund Advisors, Inc. (IFA) und Autor des hoch angesehenen Buches *Index Funds: The 12-Step Recovery Program for Active Investors (Das 12-Stufen-Erholungsprogramm für aktive Anleger)*, das sich auf Anlegerbildung konzentriert.



Um mehr darüber zu erfahren, wie IFA Ihre finanziellen Ziele unterstützen kann, besuchen Sie ifa.com oder rufen Sie uns an.

www.ifa.com

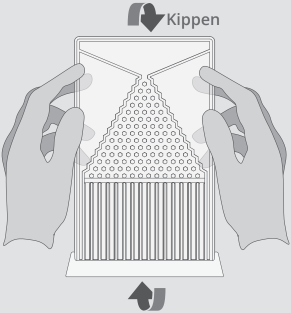
Index Fund Advisors, Inc.
19200 Von Karman Ave.
Suite 150
Irvine, CA 92612
888-643-3133
ifa.com | info@ifa.com

ANWEISUNGEN FÜR DAS GALTON-BRETT

1. Kippen Sie das Galton-Brett um, bis alle Kugeln in das Reservoir fallen.

2. Drehen Sie das Brett um und stellen Sie es auf eine ebene Fläche, bis alle Kugeln in den Fächern (Bins) landen.

3. Suchen Sie nach der größeren goldenen Kugel und beobachten Sie die Verteilung aller Kugeln.



Anweisungen vom ursprünglichen Galton-Brett, das 1873 von Tisley & Spiller für Francis Galton angefertigt wurde. Die auf dem Brett in Galtons Handschrift geschriebene Beschriftung lautet:

Instrument zur Veranschaulichung des Prinzips des Fehler- oder Streuungsgesetzes von Francis Galton, Fellow of the Royal Society.

Laden Sie das Instrument, indem Sie es umkehren, sodass alle Kugeln in die Tasche laufen. Dann drehen Sie es schnell erneut um und stellen Sie es sofort aufrecht auf einen ebenen Tisch. Die Kugeln werden vollständig in den Trichter fallen und von dort durch dessen Öffnung laufen, dabei auf verschlungenen Wegen durch die Egge hinabgleiten und sich in den senkrechten Fächern am unteren Ende ansammeln, wodurch eine Darstellung des Gesetzes der Streuung entsteht.

Besuchen Sie ifa.com/galtonboard für zusätzliche Informationen, Videos, Artikel, Fotos, soziale Medien und mehr.