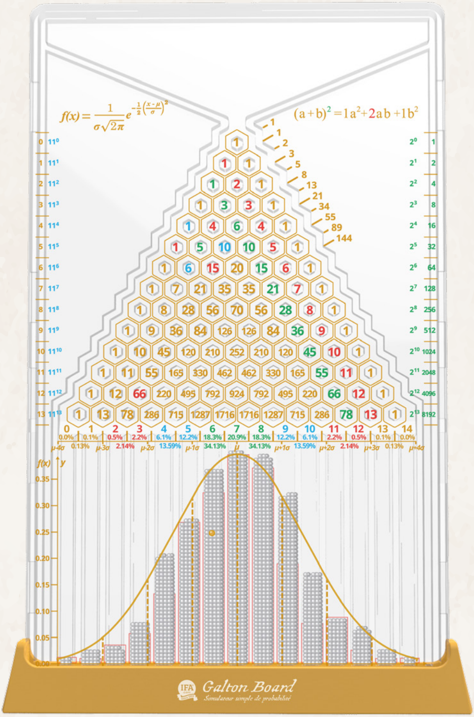
Galton Board

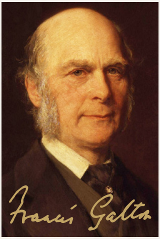
Simulateur simple de probabilité



GUIDE DE L'UTILISATEUR

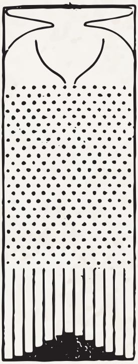
La planche de Galton

La planche de Galton (édition simple) avec le triangle de Pascal est un simulateur de probabilité de 150 mm sur 95 mm qui présente une visualisation des mathématiques en mouvement et de la puissance des probabilités et des statistiques. Au verso de la planche figure un histogramme représentant un portefeuille d'investissement théorique, illustrant le hasard et les probabilités des rendements du marché.



Sir Francis Galton

La planche de Galton met en évidence des concepts mathématiques séculaires dans un outil de bureau innovant et dynamique. Elle intègre l'invention de Sir Francis Galton (1822-1911) datant de 1873, qui illustrait la distribution binomiale, laquelle, pour un grand nombre de rangées d'hexagones et un grand nombre de billes, approche la distribution normale, un concept connu sous le nom de théorème central limite. Galton était fasciné par l'ordre de la courbe en cloche qui émerge du chaos apparent des billes rebondissant sur les picots de sa planche. Selon le théorème central limite, plus précisément selon le théorème de de Moivre (1667-1754) et Laplace (1749-1827), la distribution normale peut être utilisée comme approximation de la distribution binomiale sous certaines conditions.



Dessin original de Galton.

Lorsque la planche de Galton est retournée, les billes s'écoulent dans le réservoir supérieur. Lorsque la planche est remise à l'endroit et posée sur une surface plane, les 4 280 billes d'acier et une grande bille dorée se déversent depuis le réservoir à travers 14 rangées d'hexagones placés de manière symétrique sur la planche. Lorsque la planche est plane, les billes rebondissent sur les 105 hexagones avec une probabilité égale de se déplacer vers la gauche ou vers la droite. Au fur et à mesure que les billes se déposent dans l'une des 15 cases en bas de la planche, elles s'accumulent pour créer un histogramme en forme de cloche. Retourner la planche de Galton revient à lancer 59 920 pièces en environ 2 secondes. Une bille représentant quatorze faces consécutives tomberait dans la case n° 14 et une bille ne représentant aucune face (quatorze piles) tomberait dans la case n° 0.

Dans la partie supérieure de la planche figurent les formules de la distribution normale et du développement binomial. Dans la partie inférieure de la planche se trouvent la distribution normale ou courbe en cloche, ainsi que les rangées de moyenne et d'écart-type correspondant à cette distribution. La courbe en cloche, également appelée distribution gaussienne (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), est importante en statistiques et en théorie des probabilités. Elle est utilisée dans les sciences naturelles et sociales pour représenter des variables aléatoires, comme les billes dans la planche de Galton ou les rendements mensuels du marché boursier. On y voit également les axes vertical (Y) et horizontal (X), ainsi que les cases numérotées avec les pourcentages et nombres de billes attendus.

Blaise Pascal

Superposé aux hexagones se trouve le triangle de Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662), un triangle de nombres suivant la règle consistant à additionner les deux nombres situés au-dessus pour obtenir le nombre en dessous. Le nombre sur chaque hexagone représente le nombre de chemins différents qu'une bille peut emprunter depuis l'hexagone supérieur jusqu'à cet hexagone. La planche montre également les nombres de Fibonacci (Leonardo Fibonacci, 1175-1250), qui correspondent aux sommes de diagonales spécifiques dans le triangle de Pascal. Dans le triangle de Pascal, les propriétés et schémas mathématiques sont nombreux. Parmi lesquels : les nombres naturels, les totaux des rangées, les puissances de 11, les puissances de 2, les nombres figurés, le théorème de l'étoile de David et le schéma du bâton de hockey. Les autres schémas du triangle de Pascal non indiqués sur cette planche sont notamment : les nombres premiers, les nombres carrés, les nombres binaires, les nombres de Catalan, le développement binomial, des fractales, le nombre d'or et le triangle de Sierpinski.

Parmi les 4 280 billes d'acier se trouve une grande bille dorée, illustrant un résultat aléatoire unique. Au sommet de chaque case sont indiqués les pourcentages estimés de probabilité qu'une bille tombe dans cette case. En suivant la bille dorée, on peut observer clairement ces probabilités à chaque lancer de la planche de Galton. Avec l'histogramme rouge représentant le portefeuille d'investissement au verso, la bille dorée peut symboliser la plage probable et les probabilités du rendement boursier du mois suivant. Les probabilités de la planche de Galton quant à la case dans laquelle tombera la bille dorée peuvent remplacer la prédiction des analystes financiers.

Cette planche de Galton intègre de nombreux concepts statistiques et mathématiques, notamment : théories des probabilités, variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid), courbe normale ou en cloche, théorème central limite (théorème de de Moivre-Laplace), distribution binomiale, expériences de Bernoulli (1655-1705), régression vers la moyenne, loi des grands nombres, probabilités liées aux lancers de pièces ou aux rendements boursiers, marche aléatoire, erreur du joueur, loi de fréquence des erreurs et ce que Sir Francis Galton appelait la « loi de l'irrationnel ».

Avec les mots de Galton

Dans son livre *L'héritage naturel* (1889), Sir Francis Galton décrivait de manière imagée le dispositif qu'il avait créé pour révéler l'ordre au milieu d'un chaos apparent. Ce qui suit est un extrait adapté de cet ouvrage vieux de 136 ans. Le texte a été légèrement mis à jour pour correspondre à la terminologie utilisée pour décrire notre planche de Galton.

Le charme des statistiques

« Il est difficile de comprendre pourquoi les statisticiens limitent couramment leurs recherches aux moyennes et ne se délectent pas de vues plus complètes. Leur sensibilité à la richesse de la diversité est aussi limitée que celle du résident d'une de nos plaines anglaises, qui, en évoquant la Suisse, regrettait que ses montagnes ne puissent être jetées dans ses lacs pour se débarrasser de ces deux nuisances d'un seul coup. Une moyenne n'est qu'un fait isolé, alors que si un seul autre fait y est ajouté, un schéma normal complet, qui coïncide pratiquement avec les observations, peut potentiellement émerger. »

« Certaines personnes détestent même le mot statistiques, mais moi, je les trouve belles et pleines d'intérêt. Chaque fois qu'elles ne sont pas brutalisées, mais délicatement manipulées par des méthodes plus fines, et qu'elles sont interprétées avec prudence, leur pouvoir de traiter des phénomènes compliqués est extraordinaire. Ce sont les seuls outils grâce auxquels il est possible de se frayer un chemin à travers les obstacles redoutables qui barrent la route à ceux qui étudient la science de l'Homme. »

Illustration mécanique de la cause de la courbe de fréquence

« La courbe de fréquence et la courbe de distribution sont interchangeables ; par conséquent, si l'on parvient à clarifier l'origine de l'une, celle de l'autre devient également intelligible. Je vais maintenant illustrer l'origine de la courbe de fréquence au moyen d'un dispositif (montré ici) qui imite d'une très jolie manière les conditions dont dépend l'écart type. »

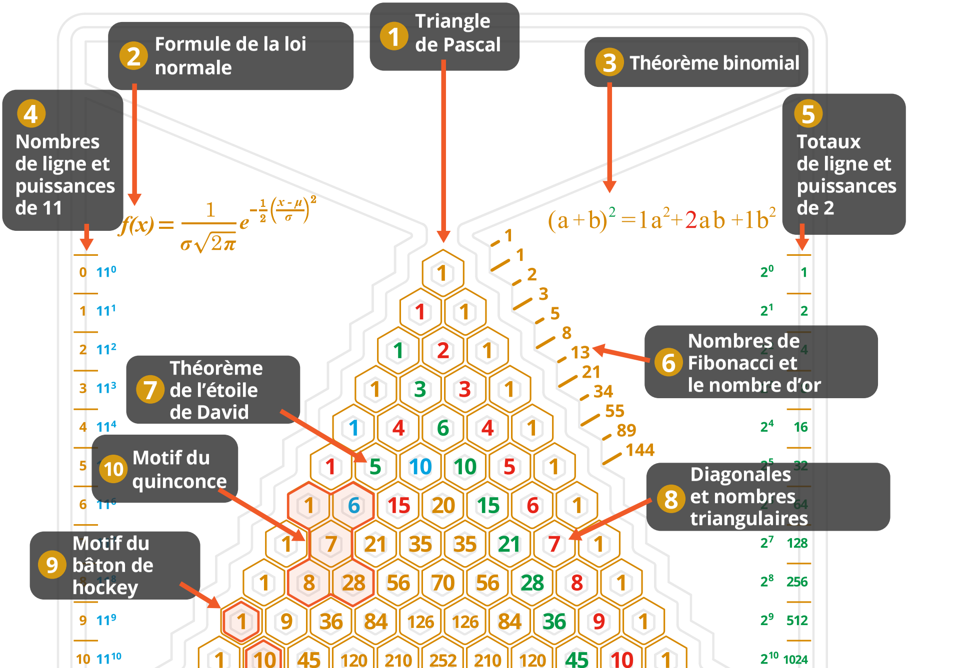
Notre conception de la planche de Galton est dotée d'un cadre en plastique antistatique. Un réservoir à billes est intégré dans la partie supérieure de la planche. Sous l'embouchure de l'entonnoir se trouve une série de 14 rangées d'hexagones (similaires aux picots de Galton) fixées perpendiculairement à l'arrière de la planche. En dessous se trouve une série de 15 cases, ou compartiments verticaux. Au total, 4 280 billes en acier se trouvent à l'intérieur de la planche. Lorsque la planche est retournée « sens dessus dessous », toutes les billes vont vers l'extrémité supérieure, dans le réservoir. Puis, lorsqu'elle est remise dans sa position de fonctionnement, l'action désirée commence. Les bords du réservoir ont pour effet de diriger toutes les billes ainsi rassemblées vers l'embouchure de l'entonnoir.

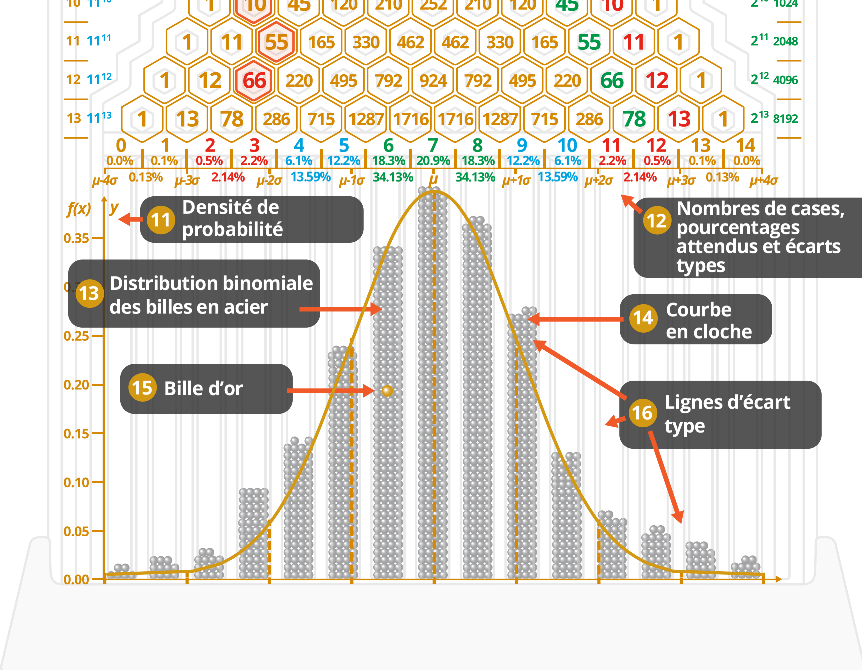
« Les billes passent par l'entonnoir et se fraient un chemin sinueux parmi les picots [hexagones] de manière curieuse et fascinante ; chacune d'elles allant un coup vers la droite ou vers la gauche, selon le cas, à chaque fois qu'elle touche un picot. Les picots sont disposés en quinconce, de sorte que chaque bille descendante frappe un picot à chaque rangée suivante. Le flux de billes s'échappant de l'entonnoir s'élargit en descendant, et chaque bille finit par être capturée dans un casier dès qu'elle quitte la dernière rangée de picots. La forme de la distribution des billes dans les cases est très proche de la courbe de fréquence, et garde pratiquement la même forme, indépendamment du nombre de répétitions de l'expérience. »

« Le fonctionnement du dispositif repose sur un principe simple : chaque bille est soumise à une série de petits événements aléatoires et indépendants au cours de sa course. Dans de rares cas, une longue série de coups chanceux continue de favoriser la course d'une bille particulière vers l'une des cases extérieures, mais dans la grande majorité des cas, le nombre d'événements qui provoquent un écart vers la droite contrebalance plus ou moins ceux qui provoquent un écart vers la gauche. C'est pourquoi la plupart des billes aboutissent dans les casiers proches de la ligne perpendiculaire issue de l'entonnoir, car la fréquence avec laquelle les billes s'écartent de cette ligne (vers la droite ou vers la gauche) diminue bien plus rapidement que l'augmentation des distances parcourues. »

Ordre au milieu du chaos apparent

« Je ne connais presque rien d'aussi apte à impressionner l'imagination que la forme merveilleuse d'ordre cosmique exprimée par la *loi de fréquence de l'erreur*. S'ils l'avaient connue, les Grecs l'auraient personnifiée et déifiée. Elle règne avec sérénité et dans un effacement total, au milieu de la confusion la plus folle. Plus la foule est immense et plus l'anarchie apparente est grande, plus sa domination est parfaite. C'est la loi suprême de la déraison. Chaque fois qu'un vaste échantillon d'éléments chaotiques est pris en main et classé par ordre de grandeur, une forme de régularité sublime et insoupçonnée se révèle avoir été latente depuis le début. Le sommet des cases ainsi classées forme une courbe fluide aux proportions invariables ; et chaque élément, au fur et à mesure qu'il est trié et mis en place, trouve, pour ainsi dire, une niche préétablie, adaptée avec précision pour lui convenir. Si la mesure à deux niveaux spécifiés dans la case est connue, celles qui seront trouvées à chaque autre niveau, sauf vers les extrémités, peuvent être prédites de la manière déjà expliquée, avec une grande précision. »


1 Triangle de Pascal
2 Formule de la loi normale
3 Théorème binomial
4 Nombres de ligne et puissances de 11
5 Totaux de ligne et puissances de 2
6 Nombres de Fibonacci et le nombre d'or
7 Théorème de l'étoile de David
8 Diagonales et nombres triangulaires
9 Motif du bâton de hockey
10 Motif du quinconce
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144
0 11^0
1 11^1
2 11^2
3 11^3
4 11^4
9 11^9
10 11^{10}
2^0 1
2^1 2
2^4 16
2^7 128
2^8 256
2^9 512
2^{10} 1024
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1



11 Densité de probabilité
12 Nombres de cases, pourcentages attendus et écarts types
13 Distribution binomiale des billes en acier
14 Courbe en cloche
15 Bille d'or
16 Lignes d'écart type
f(x)
y
0.35
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
0.0% 0.1% 0.5% 2.2% 6.1% 12.2% 18.3% 20.9% 18.3% 12.2% 6.1% 2.2% 0.5% 0.1% 0.0%
μ-4σ 0.13% μ-3σ 2.14% μ-2σ 13.59% μ-1σ 34.13% μ 34.13% μ+1σ 13.59% μ+2σ 2.14% μ+3σ 0.13% μ+4σ
11 11^11
12 11^12
13 11^13
2^11 2048
2^12 4096
2^13 8192
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

CARACTÉRISTIQUES DE LA PLANCHE DE GALTON

1 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662) est un triangle de nombres suivant la règle consistant à additionner les deux nombres situés au-dessus pour obtenir le nombre en dessous. Ce schéma peut se poursuivre indéfiniment. Blaise Pascal a utilisé ce triangle pour étudier la théorie des probabilités, comme il le décrit dans son traité mathématique, *Traité du triangle arithmétique* (1665). D'autres mathématiciens l'avaient cependant étudié des siècles avant lui en Perse, en Inde, en Chine, en Allemagne et en Italie. Les schémas du triangle correspondent aux propriétés mathématiques des coefficients binomiaux. Lorsqu'on l'applique à la planche de Galton, chaque nombre sur un hexagone représente le nombre de chemins qu'une bille peut emprunter pour atteindre cet hexagone.

2 Formule de la distribution normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dans la théorie des probabilités, la distribution normale est un type de distribution de probabilité continue pour une variable aléatoire à valeurs réelles. Voici la forme générale de sa fonction de densité de probabilité $f(x)$. Les distributions normales sont importantes en statistique et sont souvent utilisées dans les sciences naturelles et sociales pour représenter des variables aléatoires à valeurs réelles dont on ne connaît pas la distribution. La formule comprend la constante pi (**$\pi \approx 3{,}142$**), qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Elle inclut également le nombre d'Euler (**$e \approx 2{,}718$**), qui est la base du logarithme népérien. Le théorème central limite (TCL) des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) stipule que la variable aléatoire x suivra une distribution normale lorsque la taille de l'échantillon devient grande et que sigma (σ) est fini.

3 Théorème binomial

Le théorème binomial décrit le développement algébrique des puissances d'un binôme. Le triangle de Pascal définit les coefficients qui apparaissent dans ces développements binomiaux. Cela signifie que la $\mathbf{n}^{\text{ième}}$ rangée du triangle de Pascal contient les coefficients de l'expression développée du polynôme $\mathbf{(a + b)^n}$. Pour la Planche de Galton, les binômes sont gauche et droite $\mathbf{(L + R)^n}$.

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(L+R)^3 = 1L^3 + 3L^2R + 3LR^2 + 1R^3$$

Le développement de $\mathbf{(a + b)^n}$ est $\mathbf{(a + b)^n = x_0a^n + x_1a^{n-1}b + x_2a^{n-2}b^2 + \ldots + x_{n-1}ab^{n-1} + x_nb^n}$ où les coefficients de la forme $\mathbf{x_k}$ sont exactement les nombres qui apparaissent à la $\mathbf{k}^{\text{ième}}$ position de la $\mathbf{n}^{\text{ième}}$ rangée du triangle de Pascal ($\mathbf{k}$ et $\mathbf{n}$ commencent à 0). On obtient donc : $\mathbf{x_k = \binom{n}{k}}$, c'est-à-dire, « $\mathbf{n}$ parmi $\mathbf{k}$. » Le premier hexagone sur la planche de Galton est $\binom{0}{0}$, suivi en dessous par $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$.

Des exemples d'expressions binomiales sont affichés sur la planche pour $\mathbf{(a + b)^n}$ lorsque $\mathbf{n = 2}$ et $\mathbf{(L + R)^n}$ lorsque $\mathbf{n = 3}$.

4 Nombres de rangées et puissances de 11

Sur le côté gauche, les quatorze rangées du Triangle de Pascal sont numérotées, la première rangée étant désignée par n = 0 et le premier élément de chaque rangée par k = 0. Quatorze rangées sont suffisantes pour que la distribution binomiale résultante constitue une bonne approximation discrète de la distribution normale continue.

Si vous réduisez chaque rangée à un seul nombre en considérant chaque élément comme un chiffre (et en effectuant la retenue vers la gauche si l'élément comporte plus d'un chiffre), vous obtenez la puissance de onze (**11^n**) : 1, 11, 121, 1 331, 14 641... ce qui correspond aux nombres du triangle de Pascal pour cette rangée.

5 Nombre total de rangées et puissances de 2

La somme des nombres d'une rangée est égale à **2^n**, où n correspond au numéro de la rangée. Par exemple, à la rangée trois, la somme des nombres de Pascal 1 + 3 + 3 + 1 = 8, ce qui est également égal à 2^3.

La somme des nombres dans chaque rangée est également indiquée à côté de la puissance de deux, et chaque total double dans les rangées suivantes. De plus, la somme des carrés des éléments d'une rangée est égale à l'élément central de la rangée dont le numéro est doublé. Par exemple, si vous additionnez les carrés des éléments de la rangée quatre ($1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$), le total est soixante-dix, ce qui est également l'élément central de la rangée huit.

6 Nombres de Fibonacci et nombre d'or

La somme des nombres sur la diagonale du Triangle de Pascal correspond aux nombres de Fibonacci. La suite progresse dans l'ordre suivant : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, et ainsi de suite. Chaque nombre de la suite est la somme des deux nombres précédents. Par exemple : 2 + 3 = 5 ; 3 + 5 = 8 ; 5 + 8 = 13; 8 + 13 = 21.... Leonardo Fibonacci a popularisé ces nombres dans son livre *Liber Abaci* (1202). À mesure que vous progressez dans les nombres de Fibonacci, les rapports des nombres consécutifs approchent le nombre d'or (φ) of 1,61803398... sans jamais l'égaler. Par exemple : 55/34 = 1,618 ; 89/55 = 1,618 et 144/89 = 1,618. Le nombre d'or a été défini pour la première fois par Euclide dans son livre *Éléments*, écrit en 300 avant J.-C. Léonard de Vinci a utilisé ce rapport pour créer ses chefs-d'œuvre. L'équation pour le nombre d'or est :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 Théorème de l’étoile de David

Le théorème de l’étoile de David stipule que les produits des deux ensembles de trois nombres entourant un nombre donné sont égaux. Dans l’exemple montré, le nombre 5 est entouré, dans l’ordre, par les nombres 1, 4, 10, 15, 6 et 1. En prenant des nombres alternés, nous avons 1×10×6 = 4×15×1 = 60.

8 Schéma en quinconce

Le schéma en quinconce fait référence à la disposition des hexagones sur la planche. Un quinconce est un arrangement de cinq objets : quatre aux coins d’un carré ou d’un rectangle, et le cinquième au centre (comme le 5 sur un dé).

9 Diagonales et nombres triangulaires

Les diagonales contiennent les nombres figurés des simplexes. Les bords gauche et droit du triangle ne contiennent que des 1. Les diagonales suivantes contiennent les nombres naturels (nombres qui servent à compter), les nombres triangulaires (nombre de points dans un arrangement triangulaire équilatéral), les nombres tétraédriques (nombres pyramidaux triangulaires), puis les nombres pentatopiques, suivis des nombres simplexes d’ordre 5, 6 et 7. Le carré de chaque nombre naturel est égal à la somme d’une paire d’éléments adjacents sur la troisième diagonale (celle des nombres triangulaires). Par exemple : $7^2 = 49 = 21 + 28$

10 Schéma du bâton de hockey

La somme des nombres situés sur une diagonale, en partant du bord où se trouve le 1, est égale au nombre situé sur la diagonale suivante, juste en dessous. La sélection de ces nombres révèle un motif en crosse de hockey, comme on le voit ici avec 1 + 10 + 55 = 66.

11 Densité de probabilité

La densité de probabilité $f(x)$ est la relation entre les observations et leur probabilité. Elle définit la probabilité de l'occurrence d'une variable aléatoire dans une plage particulière de variables aléatoires continues. Une fonction de densité de probabilité importante est celle de la variable aléatoire gaussienne, ou normale, qui ressemble à une courbe en forme de cloche. Ces valeurs $f(x)$ supposent une distribution normale avec un sigma (σ) de 1.

12 Numéros des cases, pourcentages Attendus et écarts-types

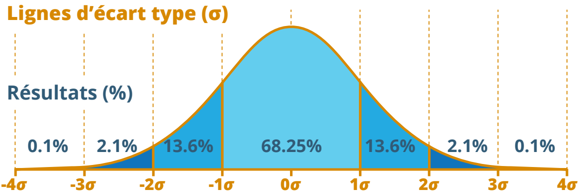
Les 15 cases à billes sont numérotés de 0 à 14 afin que l'emplacement de la bille d'or puisse être facilement identifié et consigné. De plus, les probabilités d'un résultat aléatoire se produisant dans un certain casier peuvent être identifiées avec le triangle de Pascal, en imaginant une 15e rangée du triangle (n = 14).

Les pourcentages attendus des résultats par casier sont indiqués juste en dessous du numéro de la case, avec 20,9 % attendus dans la case au centre (n° 7).

Sous l'axe d'information de la case se trouve l'axe de l'écart-type. Le nombre correspondant d'écarts-types par rapport à la moyenne, jusqu'à 4 écarts-types ($\mu \pm 4\sigma$), est inscrit au-dessus de chaque ligne d'écart-type de la courbe. Une flèche indique que les ±4ièmes écarts-types s'étendent au-delà de la dernière case. La ligne au centre de la courbe en cloche représente la moyenne (moyenne, μ, « mu »). Entre chaque ligne d'écart-type est indiqué le pourcentage de résultats attendus pour cette zone de la courbe en cloche.

13 Courbe en cloche

La distribution normale, souvent appelée « courbe en cloche », est la plus connue et la plus utilisée de toutes les distributions de probabilité. Parce que la distribution normale se rapproche si bien de nombreux phénomènes naturels, elle est devenue une référence standard pour de nombreux problèmes de probabilité. Plusieurs ensembles de données suivent la distribution normale, tels que la taille des adultes, le poids des bébés, les résultats des tests en classe, les grands échantillons de rendements mensuels des indices boursiers et les billes dans la planche de Galton. Le diagramme suivant montre la courbe en cloche divisée par les écarts-types.



Les contraintes (taille réduite des hexagones et des canaux) de cette planche de Galton physique donnent une courbe en cloche plus large. Nous avons imprimé sur la planche une courbe d'« ajustement optimal » qui est légèrement différente de celle montrée ci-dessus.

14 Distribution binomiale des billes en acier

Chaque bille d'acier représente une variable aléatoire **indépendante et identiquement distribuée (iid)** qui tombe du réservoir à travers un schéma fixe d'hexagones. Une distribution binomiale est créée par les milliers de billes d'acier à partir des 14 essais de Bernoulli que chaque bille traverse, soit un essai pour chaque hexagone touché. La distribution binomiale discrète des billes se rapproche de très près de la distribution normale continue.

15 Bille d'or

Parmi les 4 280 billes d'acier de 0,8 mm se trouve une bille d'or de 2 mm. Cette bille démontre un résultat aléatoire unique.

16 Lignes d'écart type

L'écart-type (σ) mesure la dispersion des points de données autour de la moyenne. (μ). La forme d'une distribution normale est déterminée par la moyenne et l'écart-type. Environ 68 % des données d'une distribution normale se situent à l'intérieur d'un écart-type de la moyenne. Environ 95 % se trouvent dans l'intervalle de deux écarts-types, environ 99,7 % se trouvent dans l'intervalle de trois écarts-types, et environ 99,99 % se trouvent dans l'intervalle de quatre écarts-types. Sur la planche de Galton, les 14 rangées d'hexagones correspondent à la 14e rangée du triangle de Pascal. Il y a 15 cases avec des cases à chaque extrémité et entre chaque hexagone. Ces 15 cases représentent un total de 2 x 15/14 = 8.0 écarts-types de distribution ($\mu \pm 4\sigma$). Chaque case équivaut à 0,533 écart-type et chaque écart-type équivaut à 1 875 cases (8/15 = 0,533 ou 15/8 = 1,875).

Écart-type d'un échantillon

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Écart-type de la population

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

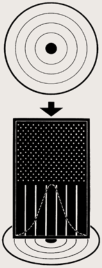
LA VISION DES EAMES DE LA PLANCHE DE GALTON

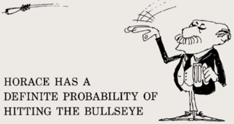
L'infographie créée par les Eames pour leur planche de Galton

Notre planche de Galton est conçue en référence à la « planche de probabilité de Galton » révolutionnaire de Charles et Ray Eames, haute de 3,35 mètres, présentée lors de l'exposition Mathematica : A World of Numbers ... and Beyond, 1961. Une planche de probabilité Eames encore plus grande, mesurant 4,42 mètres de haut, a été exposée au Pavillon IBM lors de la foire mondiale de 1964 à New York. Sur la droite, on voit une mini-version du panneau d'information de l'exposition Mathematica de 1961.

GALTON'S

PROBABILITY BOARD





THIS MACHINE DEMONSTRATES HOW A PROBABILITY CURVE CAN BE FOUND BY EXPERIMENT

HORACE HAS A DEFINITE PROBABILITY OF HITTING THE BULLSEYE

HE CAN GET AN IDEA OF THIS PROBABILITY BY COUNTING THE NUMBER OF DARTS THAT HIT THE BULLSEYE, AND COMPARING IT WITH THE TOTAL NUMBER HE THROWS.

THE MORE DARTS HE THROWS, THE BETTER HIS CHANCES OF GETTING A GOOD ESTIMATE.

IN EFFECT, THE GALTON BOARD THROWS A BALL AT THE CENTER BOX.

THE PINS INTRODUCE ERRORS (AS HORACE DOES) THAT MAKE MOST OF THE BALLS MISS THE BULLSEYE.

WE CAN ESTIMATE THE PROBABILITY OF HITTING A GIVEN BOX BY COUNTING THE NUMBER OF BALLS THAT LAND IN THE BOX.

NOTICE HOW CLOSELY THE CURVE FORMED BY THE BALLS MATCHES THE CURVE PAINTED ON THE GLASS

A ball can land in any box, and yet any given box fills to nearly the same height each time the experiment is repeated.

THIS STABILITY IS DUE TO THE FACT THAT THERE ARE MANY BALLS.

Unpredictable | **More Predictable**

IF A RANDOM EVENT HAPPENS A GREAT MANY TIMES THE AVERAGE RESULTS ARE LIKELY TO BE PREDICTABLE.*

*The first mathematical theorem of this kind was proved by Jacob Bernoulli.

"With the probability approaching certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event in a series of independent trials with constant probability will differ from that probability by less than any given positive number, provided the number of trials is sufficiently large."

Jacob Bernoulli (1654-1705)

"RELATIVE FREQUENCY" is the number of times an event* occurs divided by the number of trials.**

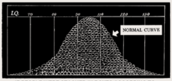
In the Probability Board the release of a ball is a ** TRIAL.

Landing (or not landing) in a given box is an * EVENT.

The curve painted on the glass was calculated by a formula.

THIS CURVE IS A PARTICULAR THEORETICAL CURVE CALLED THE "NORMAL CURVE", WHICH DESCRIBES THE BEHAVIOR OF SUCH THINGS AS–

I.Q. TESTS



IF PEOPLE WERE STACKED IN BOXES ACCORDING TO THEIR I.Q. SCORES, THEY WOULD FORM THE "NORMAL CURVE."

THE MEASUREMENTS OF BEAUTY CONTEST WINNERS

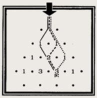
RUN AT ROULETTE

ERRORS IN MEASUREMENT

WHEN THE BALLS ARE DROPPED, THEY ARE ALL AIMED AT THE CENTER BOX. THE SUM OF ALL THE ERRORS CAUSED BY HITTING THE PINS DETERMINES THE BALLS' FINAL POSITION.

The average of many independent errors almost always leads to the Normal Curve, no matter what the underlying process may be.

THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IS A PRECISE STATEMENT OF CONDITIONS WHICH LEAD TO THE NORMAL CURVE.



PASCAL'S TRIANGLE

The number of possible paths to a given space in the array of pins is given by Pascal's Triangle. For the number of paths to a space is the sum of the number to the two spaces above it. The probability of a ball's dropping in any box can be found by counting the number of paths to that box, and comparing it with the total number of paths.

LaPLACE (1749-1827)

DeMOIVRE (1667-1754)

As the number of trials gets large, the distribution of the balls is likely to be near normal. This idea, first stated in Abraham de Moivre's "Doctrine of Chances," was later proved by the Marquis de Laplace, and called the Laplace-de Moivre limit theorem. Hard work during the next hundred years eventually produced a much more general statement of the same sort, the "central limit theorem," universally conceded to be one of the most important results of probability theory.

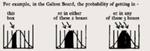
PROBABILITY IS ADDITIVE

IF THE PROBABILITY OF "5" IS $\frac{1}{6}$ AND THE PROBABILITY OF "4" IS $\frac{1}{6}$

THEN THE PROBABILITY OF "5" OR "4" IS 1/6 + 1/6. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

PROBABILITY, LIKE AREA, IS ADDITIVE. HENCE, IT IS OFTEN POSSIBLE TO REPRESENT PROBABILITY AS THE AREA UNDER A CURVE.

For example, in the Galton Board, the probability of getting in -



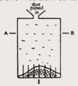
is represented by the corresponding area.

The branch of mathematics concerned with determination of lengths and areas is called "MEASURE THEORY." Probability is a branch of the Theory of Measure.

THE QUINQUNX

The pins in the Galton Board are often arranged in a figure found in nature - the four corners of a square with a pin in the center, called a Quincunx.

GALTON'S PROBABILITY BOARD -1877



GALTONIA (Hyacinthus candicanus)

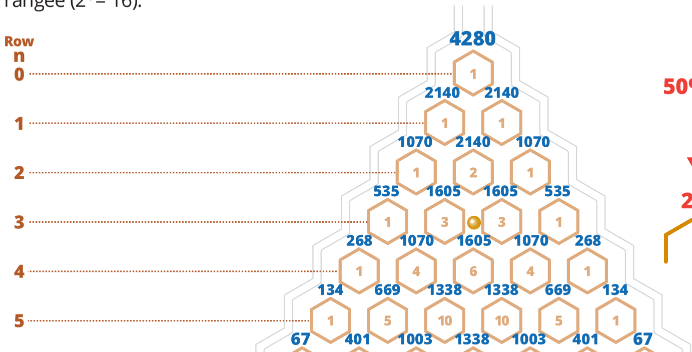
SIR FRANCIS GALTON (1822-1911)

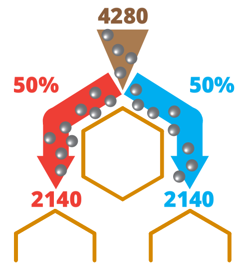
Galton was a cousin of Charles Darwin. In addition to mathematics, he studied and wrote about Botany, Heredity, Geography, Psychology, Statistical Methods, and Mountain Climbing.

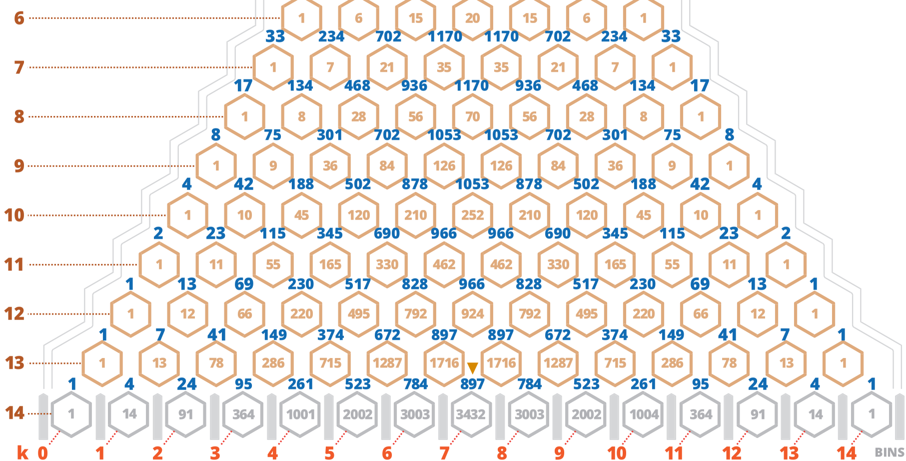
IBM

DISTRIBUTION BINOMIALE SYMÉTRIQUE DES BILLES

Pour une planche de Galton plane, la probabilité que les billes aillent à gauche ou à droite au sommet de chaque hexagone est égale. C'est un exemple d'essai de Bernoulli. Cette illustration montre le nombre attendu de billes qui se déplaceront entre chaque hexagone. Le réservoir contient approximativement 4 280 billes. Au niveau du premier hexagone, considéré comme la rangée zéro, la prévision est que 2 140 billes aillent à gauche et 2 140 billes aillent à droite. Si l'on suit la division des billes à chaque fois, on peut voir combien de billes sont attendues dans chaque case après la 14^e rangée (rangée 13). Le nombre inscrit sur chacun des hexagones du Triangle de Pascal peut être interprété comme le nombre de chemins pour atteindre la **k**^ième position de de la rangée **n**. Par exemple, pour la rangée 4, les nombres sur les hexagones sont **1, 4, 6, 4, 1** . Si on additionne ces nombres, on obtient un total de 16 chemins pour arriver aux 5 hexagones de la rangée 4. Ce total est également égal à 2 à la puissance du numéro de la rangée ($2^4 = 16$).



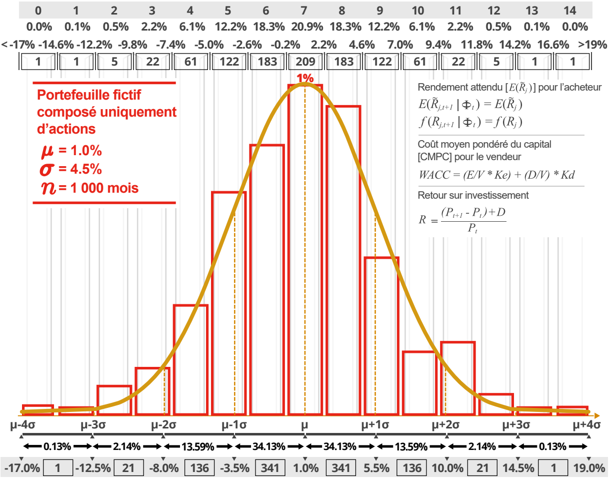




La rangée 14 (en gris) du triangle de Pascal peut être utilisée pour déterminer les probabilités (une distribution binomiale symétrique) qu'une bille tombe dans chacune des 15 cases au bas de la planche de Galton. En suivant le calcul pour n = 4 mentionné précédemment, le pourcentage attendu dans le casier central (k = 7) de la rangée 14 serait 3 432/16 384 = 20,95 %. Avec 4 280 billes, la prévision est de 897 billes dans cette case. S'il y avait 16 384 billes, les nombres inscrits sur chaque hexagone de la rangée 14 seraient égaux au nombre de billes attendues dans chaque case.

Illustrations d’un portefeuille d’investissement

Pour représenter les rendements du marché, nous avons sélectionné un portefeuille d’investissement théorique. Les barres rouges imprimées au dos de la planche représentent un histogramme de la distribution de 1 000 rendements mensuels d’un portefeuille d’investissement théorique. La barre rouge illustre un portefeuille composé à 100 % d’actions (agressif), dont nous supposons un rendement moyen mensuel de 1,0 % et un écart-type de 4,5 %, avec une taille d’échantillon de 1 000 mois. Avec quatre écarts-types, cela donne une plage de rendements allant d’environ -17 % à 19 % [1 -(4 x 4,5)= -17, 1 + (4 x 4,5) = 19]. Cela signifie qu’avec 15 cases, la plage de rendement par case est de 2,4 %, la moyenne de 1,0 % se situant exactement au centre.



Séparateurs de casiers avec pourcentages et rendements attendus

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.0%	0.1%	0.5%	2.2%	6.1%	12.2%	18.3%	20.9%	18.3%	12.2%	6.1%	2.2%	0.5%	0.1%	0.0%
1	1	5	22	61	122	183	209	183	122	61	22	5	1	1

< -17% -14.6% -12.2% -9.8% -7.4% -5.0% -2.6% -0.2% 2.2% 4.6% 7.0% 9.4% 11.8% 14.2% 16.6% >19%

Quatre échelles doivent être prises en compte au-dessus de l'histogramme des rendements du marché. La première est simplement une numérotation des 15 cases de 0 à 14. La deuxième échelle est le pourcentage de variables aléatoires (dans ce cas, les rendements mensuels) qui sont attendues dans chaque case. La troisième échelle est l'estimation de la plage de pourcentages de rendement mensuel attendue pour chacune des cases. Les séparateurs de cases sont mis à l'échelle de telle sorte que la limite de la planche corresponde aux quatre écarts-types des rendements (≈99,99 % des résultats, soit $\mu \pm 4\sigma$). L'échelle inférieure correspond au nombre de mois attendu dans chaque case, basé sur un échantillon de 1 000 mois.

Axe Inférieur

μ-4σ		μ-3σ		μ-2σ		μ-1σ		μ		μ+1σ		μ+2σ		μ+3σ		μ+4σ
	← 0.13% →		← 2.14% →		← 13.59% →		← 34.13% →		← 34.13% →		← 13.59% →		← 2.14% →		← 0.13% →	
-17.0%	1	-12.5%	21	-8.0%	136	-3.5%	341	1.0%	341	5.5%	136	10.0%	21	14.5%	1	19.0%

L'axe inférieur comporte trois échelles : La première identifie les lignes d'écart-type. La deuxième spécifie le pourcentage de résultats attendus entre chaque ligne d'écart-type. La troisième rangée estime combien de rendements mensuels sont attendus entre chaque ligne d'écart-type, sur la base d'un échantillon de 1 000 mois.

Le modèle de marche aléatoire

L'hypothèse des marchés efficients stipule que le prix actuel ($p_{j,t}$) d'un titre (j) reflète pleinement l'information disponible (Φ_t), ce qui implique « ...que les changements de prix successifs, ou plus couramment, les rendements successifs sur une période, sont indépendants. De plus, elle suppose que les changements successifs, ou les rendements, sont identiquement distribués.

Ensemble, les deux hypothèses constituent le modèle de marche aléatoire. Officiellement, le modèle dit que :

$$f(R_{j,t+1} \mid \Phi_t) = f(R_j),$$

ce qui est l'énoncé habituel selon lequel les distributions de probabilité conditionnelle et marginale d'une variable aléatoire indépendante sont identiques. De plus, la fonction de densité (f) doit être la même pour tout temps (t). » Si on suppose que le rendement attendu d'un titre est constant dans le temps, on a :

$$E(\widetilde{R}_{j,t+1} \mid \Phi_t) = E(\widetilde{R}_j).$$

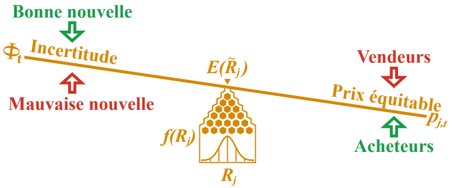
Source : Eugene F. Fama & Merton H. Miller, *The Theory of Finance,* 1972, pg. 339

Le modèle Hebner

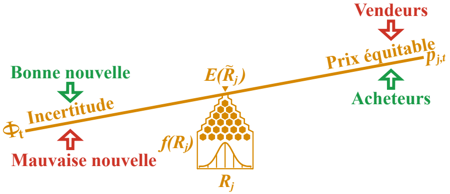
Les schémas de balançoire suivants illustrent l'hypothèse des marchés efficients d'Eugene Fama, qui stipule que les prix des titres (j) reflètent pleinement toutes les informations disponibles, ce qui donne des prix équitables. Le côté gauche de la balançoire représente l'ensemble des informations (Φ_t) est supposé être entièrement reflété dans le prix à cet instant (t) et le côté droit représente les prix ($p_{j,t}$) que des millions d'acheteurs et de vendeurs consentants ont conclus comme étant équitables étant donné l'ensemble des informations à cet instant. L'hypothèse des marchés efficients affirme que, dans un marché bien organisé et raisonnablement transparent, le prix du marché (p_t) est généralement égal ou proche de la juste valeur, car les investisseurs réagissent rapidement pour incorporer les nouvelles informations (Φ_t) concernant la rareté relative, l'utilité ou les rendements potentiels lors de l'échange d'espèces contre des titres.

L'idée des trois composantes du modèle est venue à Mark Hebner pendant la crise financière mondiale de 2008. Le modèle commence avec la balançoire placée au sommet du triangle de Pascal. Ensuite, les billes qui rebondissent et traversent un ensemble d'hexagones représentent le caractère aléatoire des rendements mensuels du marché boursier ($\boldsymbol{R_{j,t+1}}$). Troisièmement, les billes atterrissent dans les casiers, représentant les rendements réalisés ($\boldsymbol{R_j}$), lesquels, dans les grands échantillons, ressemblent à la courbe en cloche ($\boldsymbol{f(R_j)}$).

C'est un flux aléatoire et continu de nouvelles et de prévisions, bonnes et mauvaises, qui, à tout moment donné, représente l'incertitude du rendement attendu d'un investissement ($\boldsymbol{E(\tilde{R}_j)}$) maintenu à un niveau de risque constant. Si l'incertitude augmente en raison de mauvaises nouvelles, le prix doit diminuer proportionnellement afin que le rendement attendu reste majoritairement constant.



Si l'incertitude diminue en raison de bonnes nouvelles, le prix doit augmenter proportionnellement afin que le rendement attendu reste majoritairement constant.



Ce modèle est connu sous le nom de modèle de Hebner et doit être considéré comme un cadre intégrant la planche de Galton et le triangle de Pascal dans la compréhension du fonctionnement des marchés.

Coût du Capital

En économie et en comptabilité, le coût du capital est le coût des fonds d'une entreprise (à la fois la dette et les capitaux propres) ou, du point de vue d'un investisseur, le taux de rendement requis sur les titres existants d'une entreprise. Il est également utilisé pour évaluer les nouveaux projets d'une entreprise. C'est le rendement minimal que les investisseurs attendent en échange du capital fourni à l'entreprise, établissant ainsi une référence que tout nouveau projet doit atteindre.

$$CMPC = (E/V * Ke) + (D/V * Kd)$$

E est la valeur de marché des capitaux propres de l'entreprise.
V est la valeur de marché totale des capitaux propres et de la dette, soit $E+D$.
Ke est le coût des capitaux propres.
D est la valeur de marché totale des capitaux propres et de la dette.
Kd est le coût de la dette.
$CMPC$ est le coût moyen pondéré du capital
Rappel : le rendement attendu de l'acheteur est aussi le coût du capital pour le vendeur ($E(\tilde{R}_{j,t}) = CMPC$).

Formule du retour sur investissement

La formule du rendement ou de la perte réalisée (R) d'un investissement est la variation du prix (P_{t+1} - P_t), plus tout dividende ou argent versé à l'investisseur durant la période (D), divisé par le prix initial de l'investissement (P_t).

$$R = \frac{(P_{t+1} - P_t) + D}{P_t}$$

Modèles à facteurs Fama/French

Modèle à cinq facteurs Fama/French pour les capitaux propres

Le modèle à cinq facteurs Fama/French pour les actions est un modèle d'évaluation des actifs visant à capter les schémas de marché, de taille, de valeur, de rentabilité et d'investissement dans les rendements moyens des actions Il a été développé en 2014 par le lauréat du prix Nobel Eugene Fama et son co-auteur et collègue, Kenneth French. Ce modèle explique entre 71 % et 94 % de la variance transversale des rendements attendus pour des portefeuilles diversifiés, en se basant sur cinq facteurs pour les capitaux propres. Il constitue une extension du MEDAF (Modèle d'évaluation des actifs financiers) (1964) et du modèle à trois facteurs Fama/French (1993). L'équation du modèle à cinq facteurs Fama/French est une régression en séries temporelles d'une série d'indices de recherche créés par Fama et French, qui comprennent les prix historiques à long terme des actions de diverses caractéristiques d'entreprise. Le coefficient pour chaque facteur (variables indépendantes) indique l'exposition ou l'inclinaison du portefeuille à ce facteur. Si l'exposition aux cinq facteurs – marché (b_i), taille (s_i), valeur (h_i), rentabilité (r_i), et investissement (c_i) – explique toute la variation des rendements attendus, alors l'ordonnée à l'origine alpha (a_i) dans l'équation suivante est nulle pour tous les titres et portefeuilles (i).

$$R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{Mt}\text{-}R_{Ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{it}$$

R_{it} est le rendement du portefeuille i pour la période t (variable dépendante).
R_{Ft} est le rendement sans risque.
$R_{Mt}\text{-}R_{Ft}$ est l'écart de rendement entre le marché boursier pondéré par la capitalisation et les liquidités.
SMB_t est le rendement d'un portefeuille diversifié de petites capitalisations moins le rendement d'un portefeuille diversifié de grandes capitalisations (c'est-à-dire l'effet de taille).
HML_t est la différence entre le rendement de portefeuilles diversifiés d'actions à rapport valeur comptable/valeur de marché (BtM) élevé et faible (c'est-à-dire l'effet de valeur).
RMW_t est la différence entre les rendements de portefeuilles diversifiés d'actions ayant une rentabilité solide et une faible rentabilité.
CMA_t est la différence entre les rendements de portefeuilles diversifiés d'actions d'entreprises à faible et forte intensité d'investissement, que Fama et French ont qualifié de conservatrices et agressives.
e_{it} est un terme d'erreur, qui est un résidu de moyenne nulle.

Source : Fama, Eugene F. et French, Kenneth R., *A Five-Factor Asset Pricing Model* (septembre 2014).

Ma fascination pour la planche de Galton

Mark T Hebner

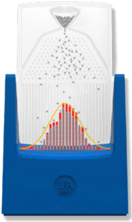
Je m'appelle Mark T. Hebner, et je suis le fondateur et PDG d'Index Fund Advisors, Inc. (IFA.com). Mon entreprise est spécialisée dans la gestion de patrimoine et la préparation fiscale. Je suis également le créateur de plusieurs versions modernes de la planche de Galton.

La manière la plus courante de décrire le risque et le rendement d'un investissement consiste à estimer son rendement moyen et l'écart type de ce rendement à partir d'un large échantillon de données historiques, par exemple, 1 000 mois de données d'indice. Si vous souhaitez tracer une courbe en cloche dans Excel, vous n'avez besoin que de connaître la moyenne et l'écart-type. Ces deux paramètres suffisent à la définir. Comme il se trouve, le célèbre graphique de dispersion de Harry Markowitz, qui lui a valu le prix Nobel, n'était en réalité qu'une comparaison de courbes en cloche représentant le rendement moyen et l'écart type. Alors imaginez mon enthousiasme quand j'ai découvert un dispositif physique capable de générer une courbe en cloche. J'ai compris qu'il s'agissait d'une démonstration puissante du fonctionnement des marchés et de la probabilité d'une gamme de résultats possibles. J'ai aussi réalisé que la planche de Galton reproduit en quelque sorte les rendements mensuels d'un investissement, elle permet de visualiser le rendement attendu constant, l'aléa des rendements sur une période de trente jours, et la courbe en cloche des rendements réalisés sur de longues périodes. En résumé, ce dispositif aide les investisseurs à comprendre des notions essentielles en matière d'investissement.

Ma fascination pour la planche de Galton a commencé en 2005, lorsque j'ai vu un film du Eames Office consacré à l'Exposition universelle de 1964. Charles Eames y avait construit une planche de Galton de plus de quatre mètres de haut, installé à l'extérieur du pavillon IBM, inspiré d'un modèle qu'il avait déjà conçu pour *Mathematica* : *A World of Numbers... and Beyond. Mathematica* a été la première exposition immersive et à grande échelle produite par le Eames Office et parrainée par IBM. Elle avait été créée pour l'inauguration, en 1961, de la nouvelle aile scientifique du California Museum of Science and Industry à Los Angeles.

Planche de Galton de 2,4 mètres (8pieds) dans le hall de l'IFA

Ma première planche de Galton, que l'on voit sur la photo, a été conçue et fabriquée par l'Oregon Museum of Science and Industry. La photo représente un simulateur de probabilité de qualité musée de 2,4 m de haut sur 1,2 m de large, que j'ai commandé en 2009 pour aider les investisseurs à comprendre la diversité, la probabilité et la forme des résultats issus d'une série d'événements aléatoires. Cette planche de Galton est exposée dans le hall d'entrée du siège d'Index Fund Advisors ; elle symbolise l'ordre qui émerge du chaos dans la marche aléatoire de Wall Street. Les barres rouges situées derrière les billes représentent un vaste échantillon de rendements mensuels d'un portefeuille théorique, permettant de comparer la trajectoire des billes au comportement du marché boursier. Sur les marchés financiers, les événements aléatoires sont les nouvelles économiques ou d'entreprise, ainsi que les cours des titres qui reflètent ces informations. Le flux aléatoire des billes, partant d'un point central, simule une série de prix équitables et forme progressivement une distribution normale des rendements mensuels, sous la forme d'une courbe en cloche.



The Random Walker®

Avec l'aide de Philip Poissant, Jerry Xu, Art Forster, Jackson Lin, Mike Auchterlonie, la famille Brunson et d'autres collaborateurs, j'ai créé en 2015 ma première planche de Galton miniature, haute de 19 cm, baptisée The Random Walker® (brevet américain n° D784,449).

Cette version compacte de la planche de Galton n'est pas seulement un outil éducatif utile pour comprendre les concepts statistiques et le caractère aléatoire du marché boursier, mais aussi un outil de bureau agréable avec lequel jouer. Grâce à un mécanisme innovant de basculement et de réinitialisation, on peut observer l'ordre émerger du chaos d'un simple geste du doigt. Environ 60 000 de ces planches se trouvent sur des bureaux partout dans le monde.

En 2024, nous avons créé une nouvelle version de la planche de Galton, de plus grande taille, qui se prête mieux aux démonstrations devant d'autres personnes Son format est de 30,5 cm sur 21,5 cm. Nous l'avons appelée Planche de Galton : simulateur de probabilité et l'avons fait breveter aux États-Unis (Brevet n° 12,268,971 B1) Ce modèle a également ajouté deux réglettes d'information sur le marché boursier et un guide de l'utilisateur détaillé et éducatif de 19 pages.

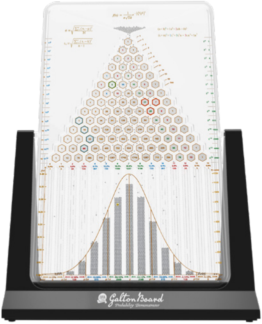


Planche de Galton :
Simulateur de probabilité

Cette nouvelle version de la planche de taille bureau intègre de nombreuses améliorations de conception par rapport à la version précédente. Elle saisit plus précisément les concepts de la distribution binomiale et du triangle de Pascal, ainsi que les nombreux concepts mathématiques qui y sont associés. En ajoutant les réglettes d'information des données de rendement mensuel, on peut voir l'incorporation d'éléments du marché boursier, y compris le modèle de Hebner, et à quel point ils correspondent à la courbe en cloche des billes.

Cette nouvelle planche de Galton simple offre une conception économique et compacte, qui peut même tenir dans la poche de votre chemise.

Pour promouvoir davantage la compréhension des principes intégrés dans la planche de Galton et le triangle de Pascal, j'ai commandé et créé une version application de la planche de Galton en 2023. Cette version application utilise le gyromètre qui vous permet d'incliner le téléphone ou l'iPad et d'entendre et de voir les billes se déverser comme s'il s'agissait de billes physiques roulant dans votre appareil. En appuyant sur l'icône des paramètres, vous pouvez également superposer vingt histogrammes de portefeuilles d'indices et voir le changement dans l'échelle des rendements des cases à mesure que le risque change. Pour obtenir l'application pour iPhone and iPad, allez à l'Apple Store et recherchez « Index Fund Advisors ». Cherchez ensuite l'icône de la planche de Galton dans l'application pour accéder à la planche interactive. Si vous avez un ordinateur portable ou de bureau Mac, vous pouvez également aller au Mac App Store et rechercher l'application Planche de Galton. Pour les appareils Android, allez sur Google Play et recherchez « Index Fund Advisors ».

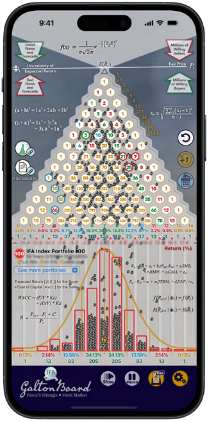


Planche de Galton :
Version application

Obtenir l'application

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

À propos de Index Fund Advisors

Index Fund Advisors
WEALTH MANAGEMENT • TAXES

Remplacer la spéculation par l'éducation

Index Fund Advisors, Inc. (IFA) est un cabinet de conseil et de gestion de patrimoine rémunéré exclusivement par des honoraires. Il propose des stratégies d'investissement appropriées au risque, diversifiées à l'échelle mondiale et gérées sur le plan fiscal, tout en respectant une norme de diligence fiduciaire.

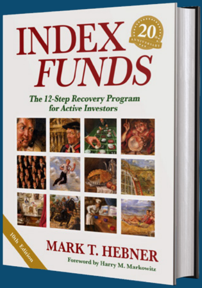
IFA est un cabinet de conseil agréé en investissement qui fournit des conseils en investissement à des particuliers, des régimes de retraite, des trusts, des sociétés, des organismes à but non lucratif, ainsi que des institutions publiques et privées. Fondé en 1999, IFA a célébré son 25e anniversaire en 2024. IFA propose des conseils en investissement à sa clientèle dans tous les États-Unis.

La valeur d'IFA va au-delà des conseils en investissement. En tant que partenaire financier holistique, IFA fournit des conseils en investissement parallèlement à la gestion de patrimoine et à la planification financière pour aider ses clients à gérer leur parcours financier. Nos conseillers en patrimoine adoptent une approche personnalisée pour faire correspondre les clients aux portefeuilles, tout en offrant une gamme complète de services de gestion de patrimoine et de planification financière pour une expérience client réfléchie et complète.

IFA cherche à éviter les activités génératrices de coûts inutiles, souvent associées à la sélection d'actions, au calendrier boursier, à la sélection de gestionnaires et à la sélection de types d'investissement. IFA opte plutôt pour une approche quantitative et disciplinée conçue pour optimiser la diversification tout en restant rentable.

IFA intègre la recherche et les indices basés sur les travaux d'Eugene Fama et Kenneth French, tirant parti de décennies de données historiques sur le risque et le rendement, de la conception de fonds indiciels de troisième génération et de techniques de négociation passive affinées développées par Dimensional Fund Advisors.

IFA propose des services de gestion de placements et des stratégies de portefeuille adaptés aux circonstances et objectifs du client, ainsi que de la planification fiscale, de la comptabilité, de la planification financière en ligne et des services de référence pour une expérience client personnalisée et bien pensée. Un conseiller en patrimoine IFA expérimenté fournit des conseils personnalisés visant à aider les clients à atteindre leurs objectifs financiers à long terme.



Mark T. Hebner est le fondateur et PDG d'Index Fund Advisors, Inc. (IFA), et l'auteur du livre très apprécié : *Index Funds: The 12-Step Recovery Program for Active Investors* (Les fonds indiciels : le programme de rétablissement en 12 étapes pour les investisseurs actifs), axé sur l'éducation des investisseurs.

Pour en savoir plus sur la façon dont IFA peut vous aider à atteindre vos objectifs financiers, rendez-vous sur le site ifa.com ou appelez-nous.

www.ifa.com

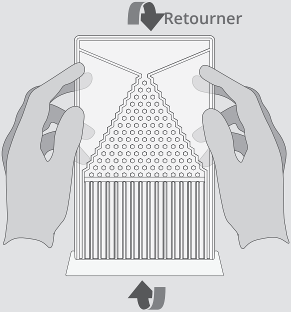
Index Fund Advisors, Inc.
19200 Von Karman Ave.
Suite 150
Irvine, CA 92612
888-643-3133
ifa.com | info@ifa.com

MODE D'EMPLOI DE LA PLANCHE DE GALTON

1. Retournez la planche de Galton jusqu'à ce que toutes les billes tombent dans le réservoir.

2. Retournez la planche à nouveau et placez-la sur une surface plane jusqu'à ce que toutes les billes se déposent dans les cases.

3. Trouvez la plus grande bille dorée et observez la distribution de toutes les billes.



Les instructions figurant sur la planche de Galton originale, fabriquée pour Francis Galton en 1873 par Tisley & Spiller. L'inscription figurant sur la planche, rédigée de la main de Galton dit :

Instrument pour illustrer le principe de la loi d'erreur ou de dispersion par Francis Galton, membre de la Royal Society

Chargez l'instrument en le retournant pour envoyer toutes les billes dans la poche. Renversez-le brusquement, puis placez-le immédiatement à la verticale sur une table plane. Les billes tomberont toutes dans l'entonnoir, puis, s'écoulant par son ouverture, suivront des trajectoires incertaines à travers les picots et s'accumuleront dans les compartiments verticaux du bas, offrant ainsi une représentation de la loi de dispersion.

Vous trouverez plus d'informations sur ifa.com/galtonboard, ainsi que des vidéos, des articles, des photos, nos réseaux sociaux, etc.